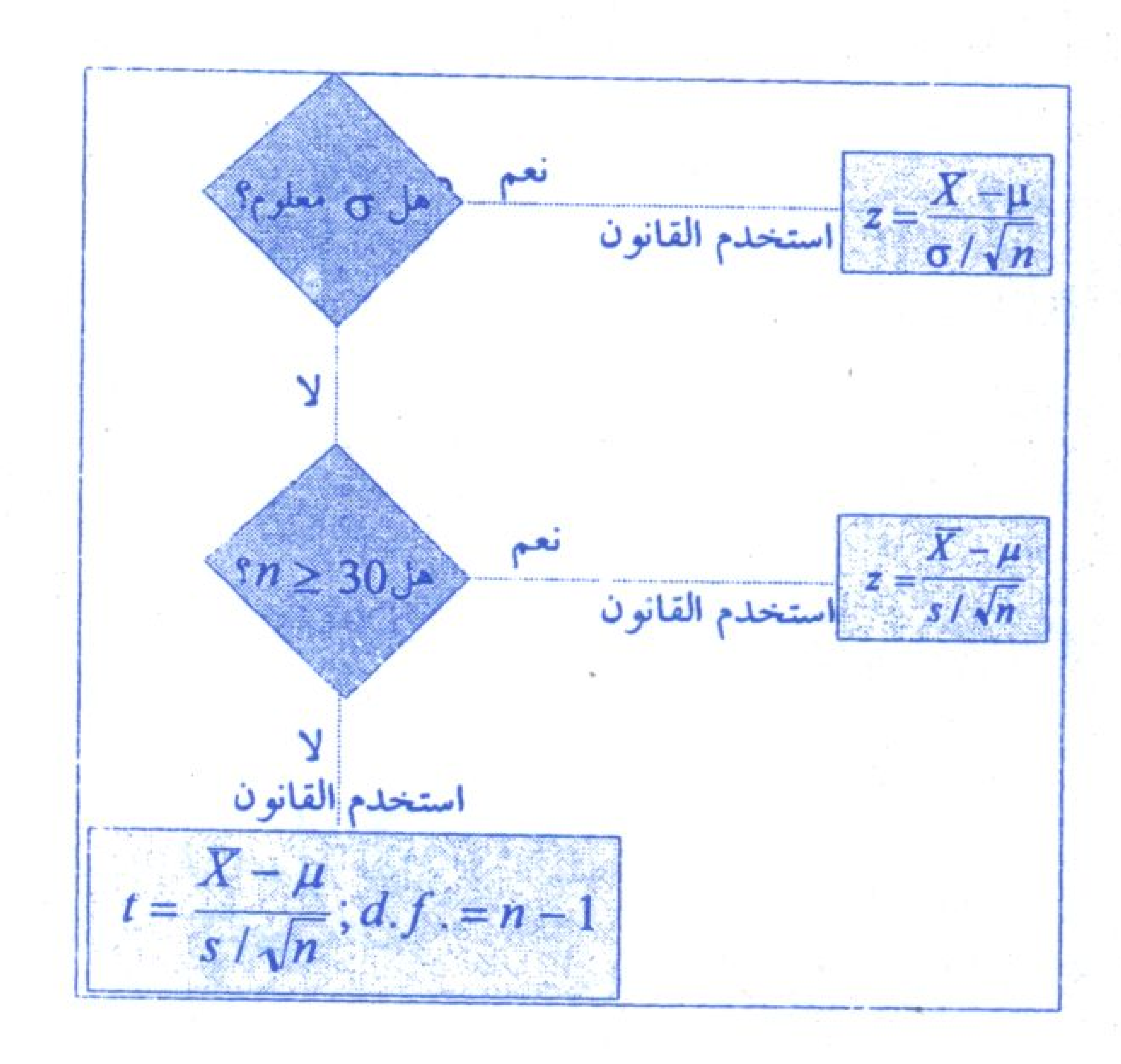
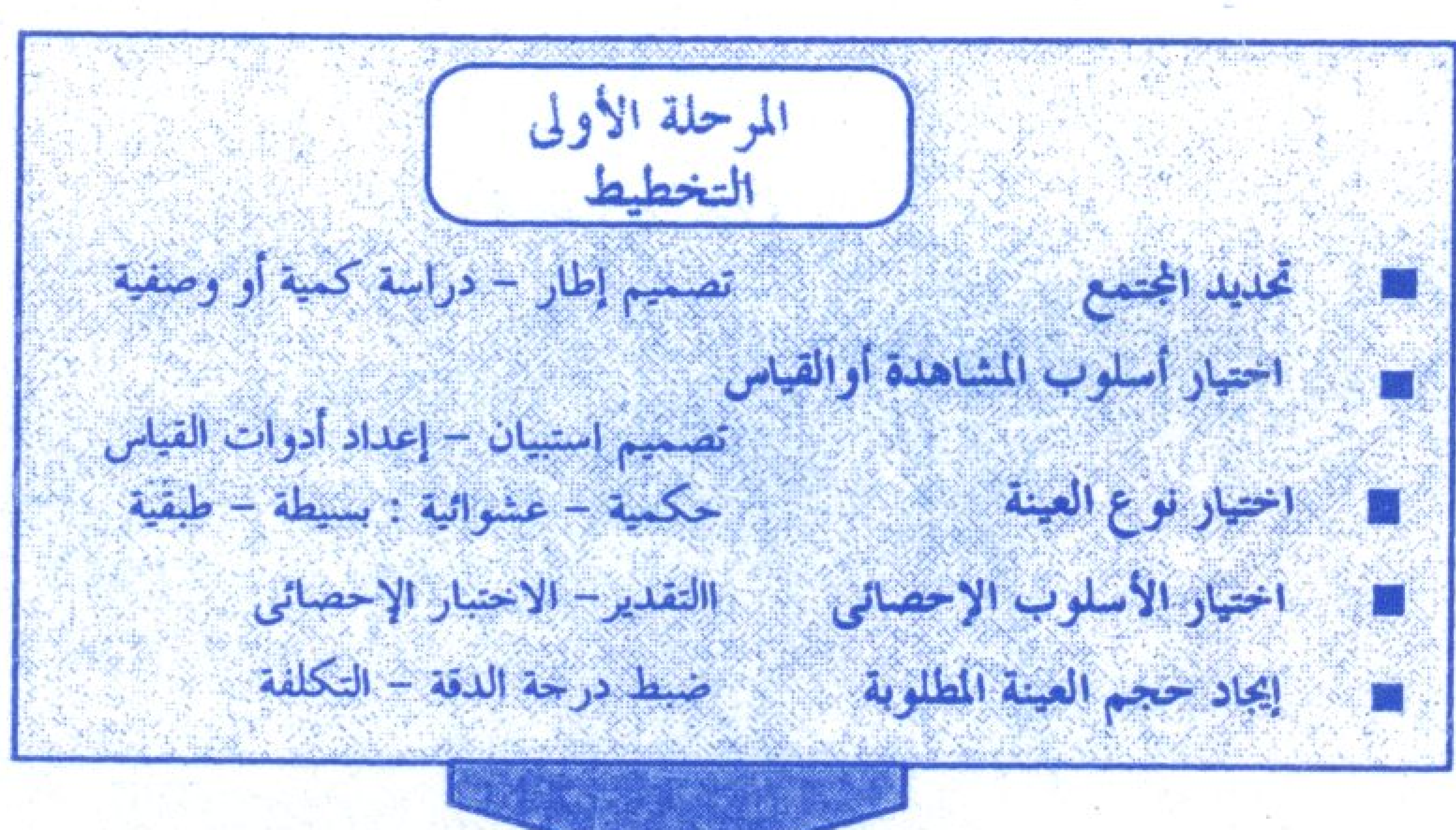
دروس فى

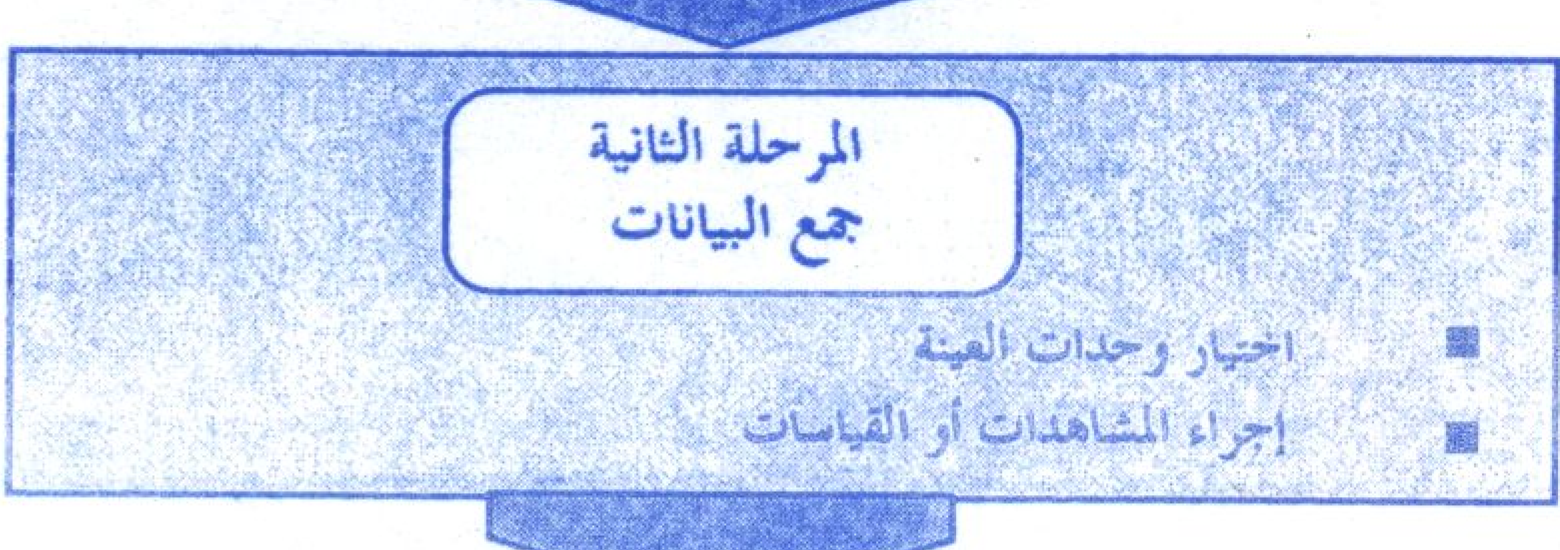
الإحصاء التطبيقى

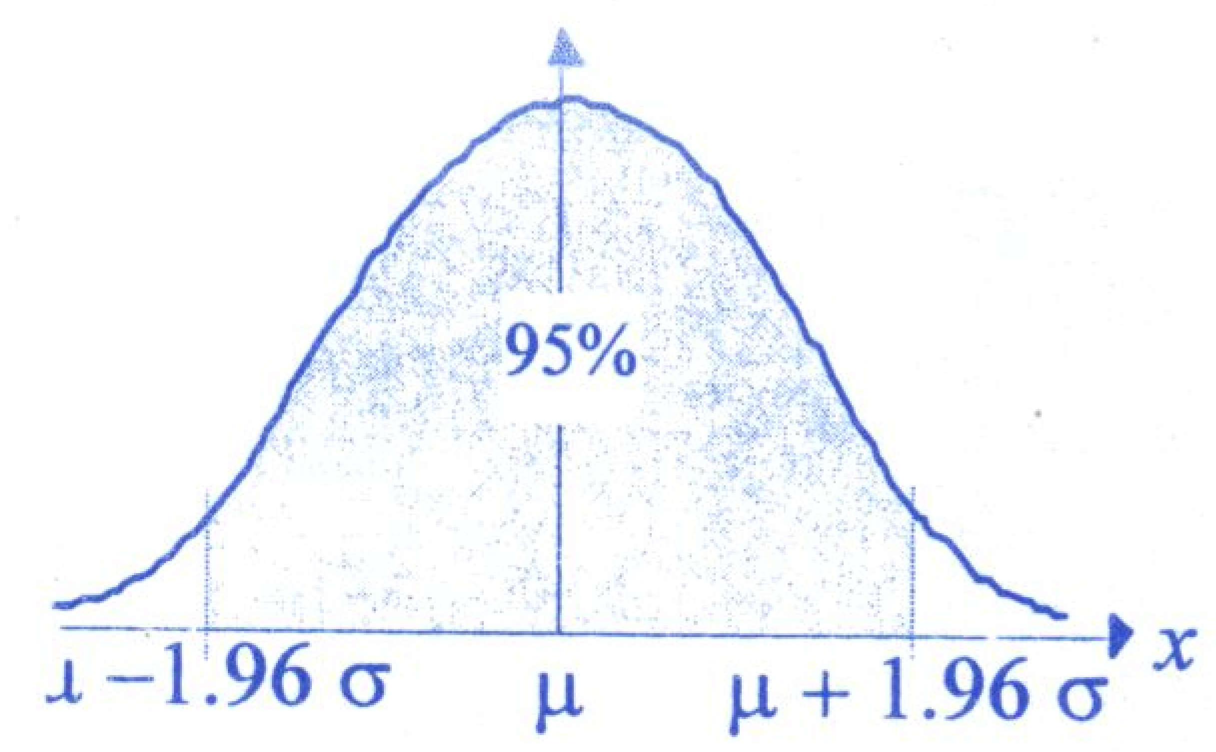
إعداد

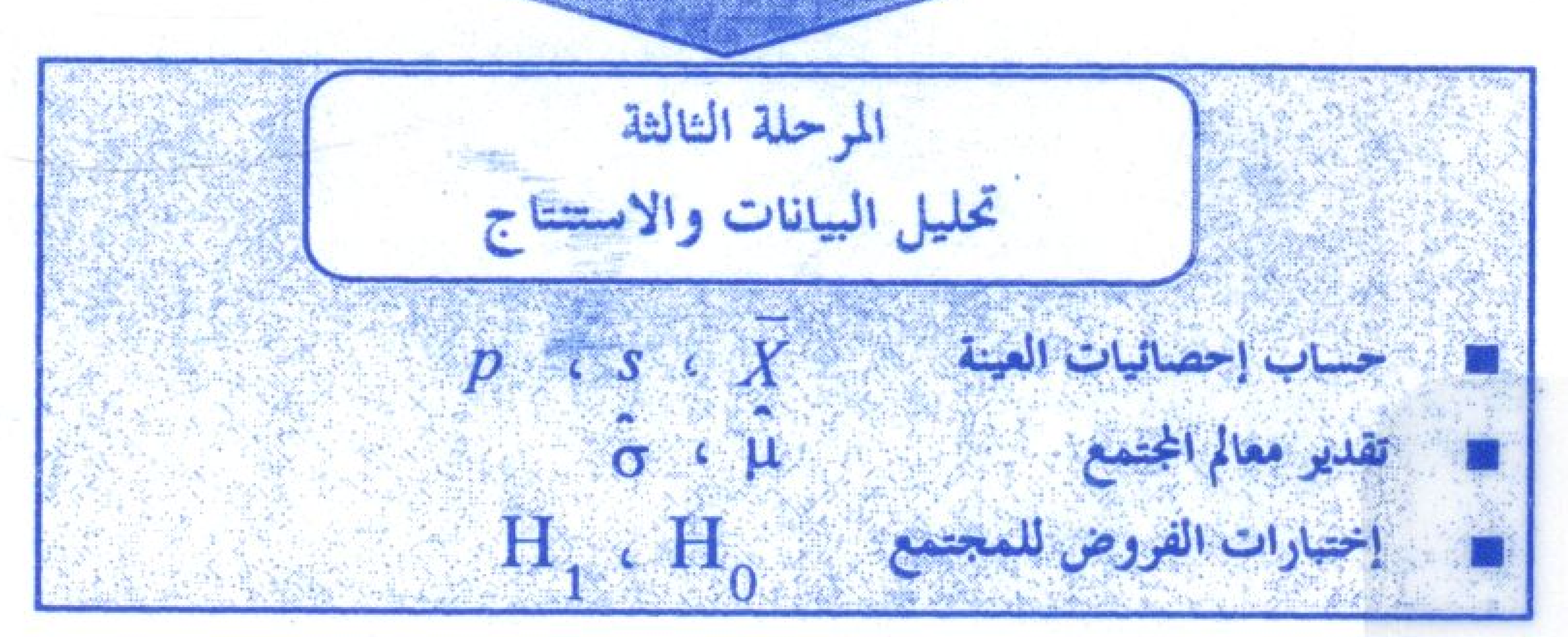
أ.د. على نصر السيد الوكيل

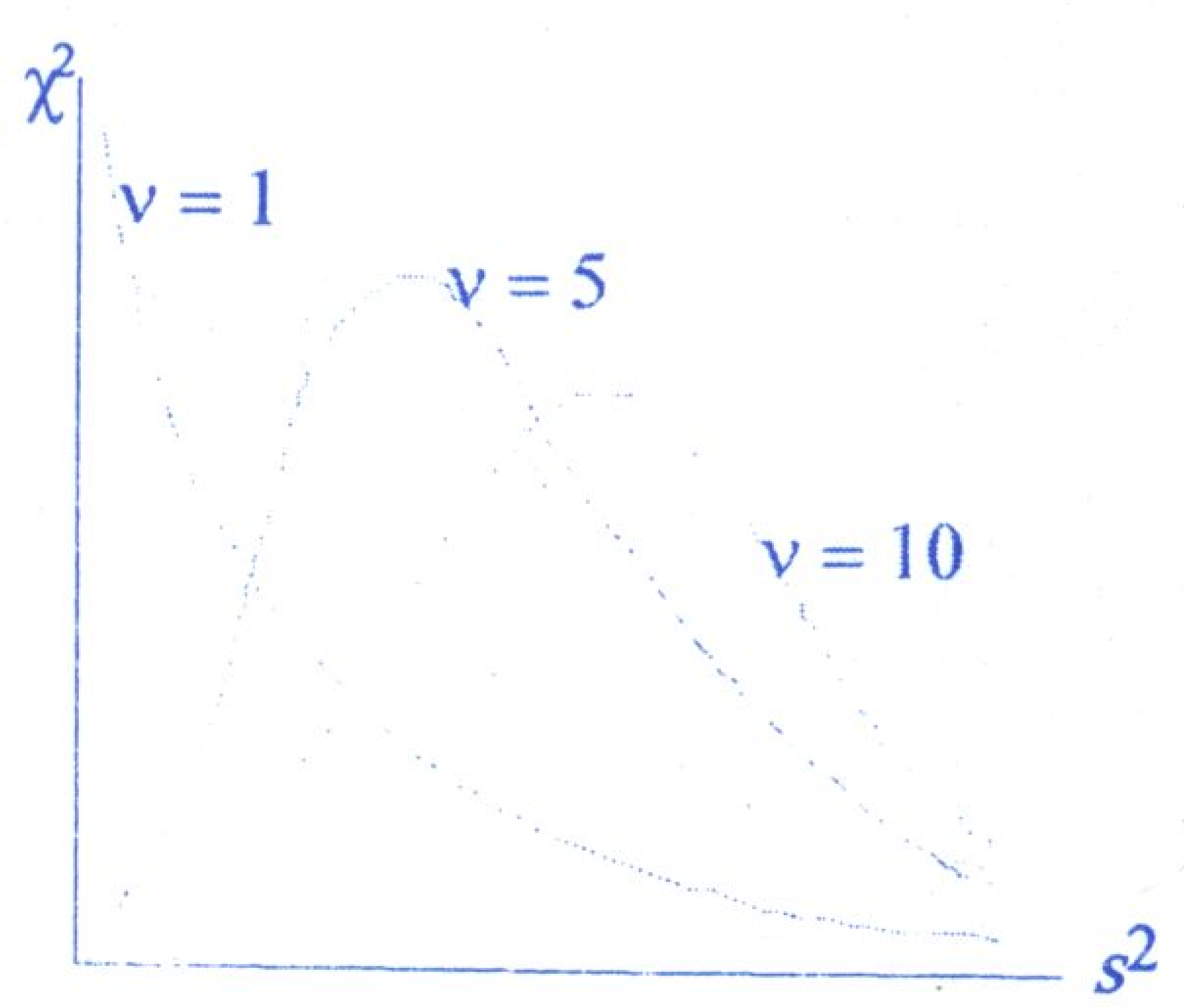


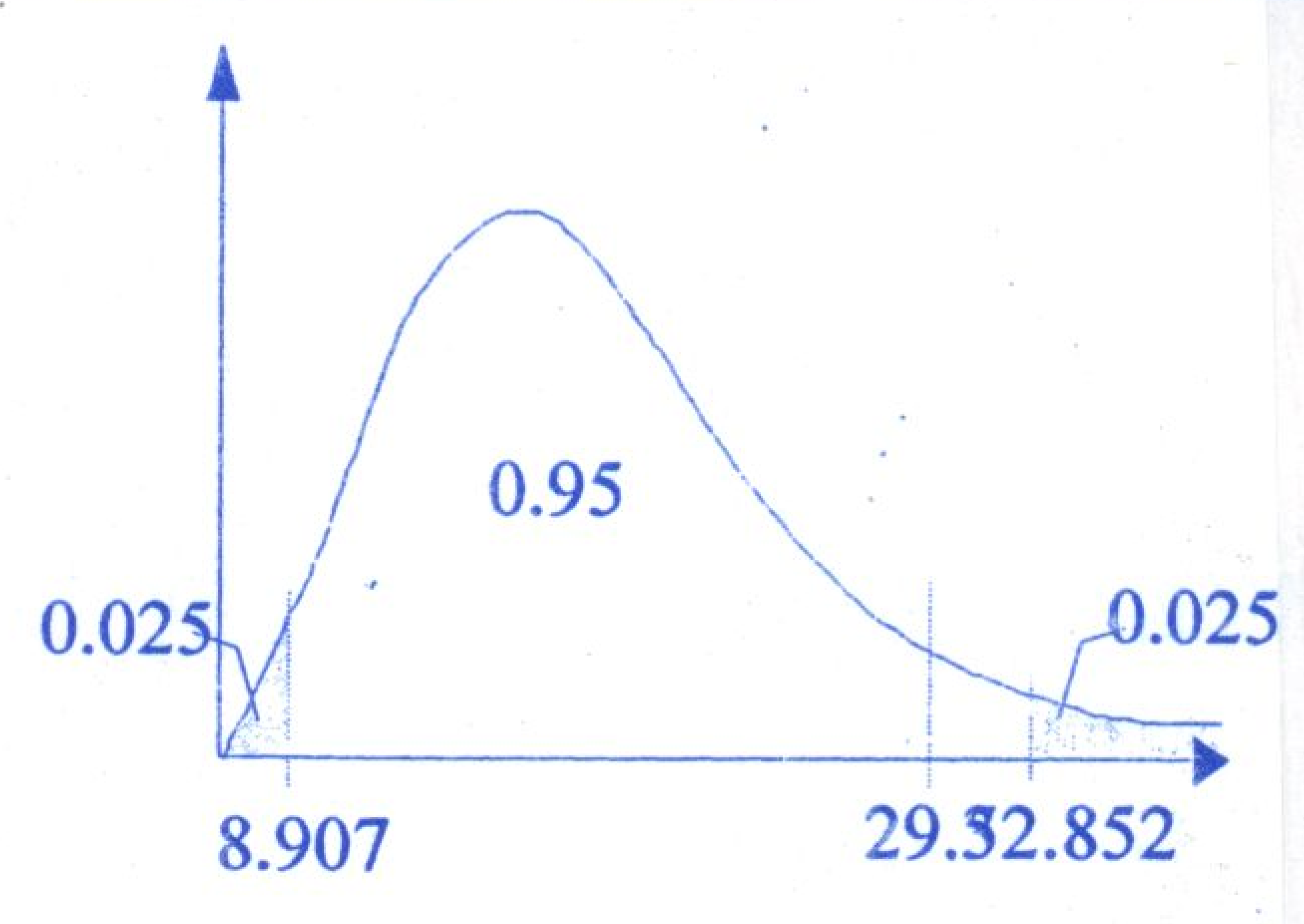












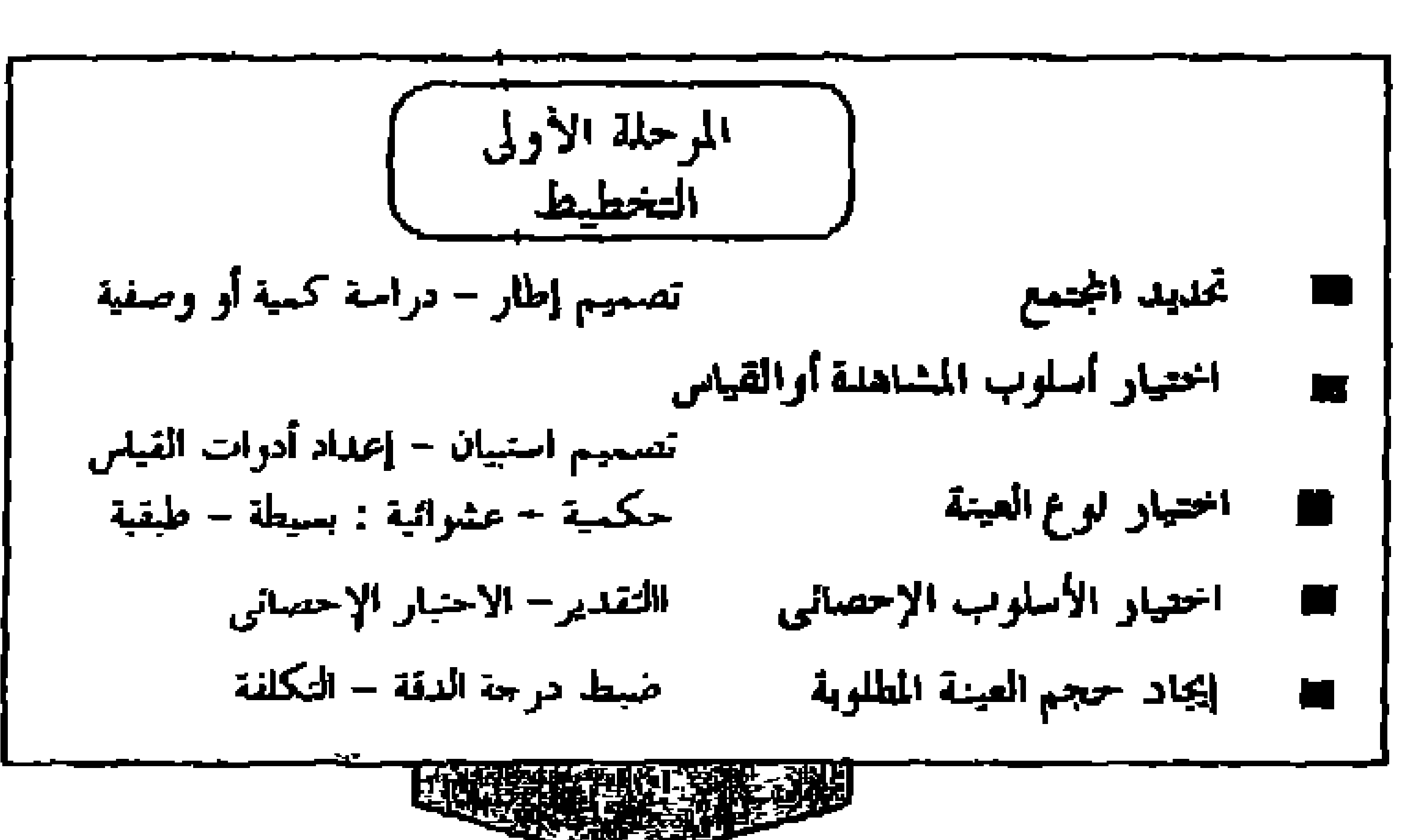
٢٠١١

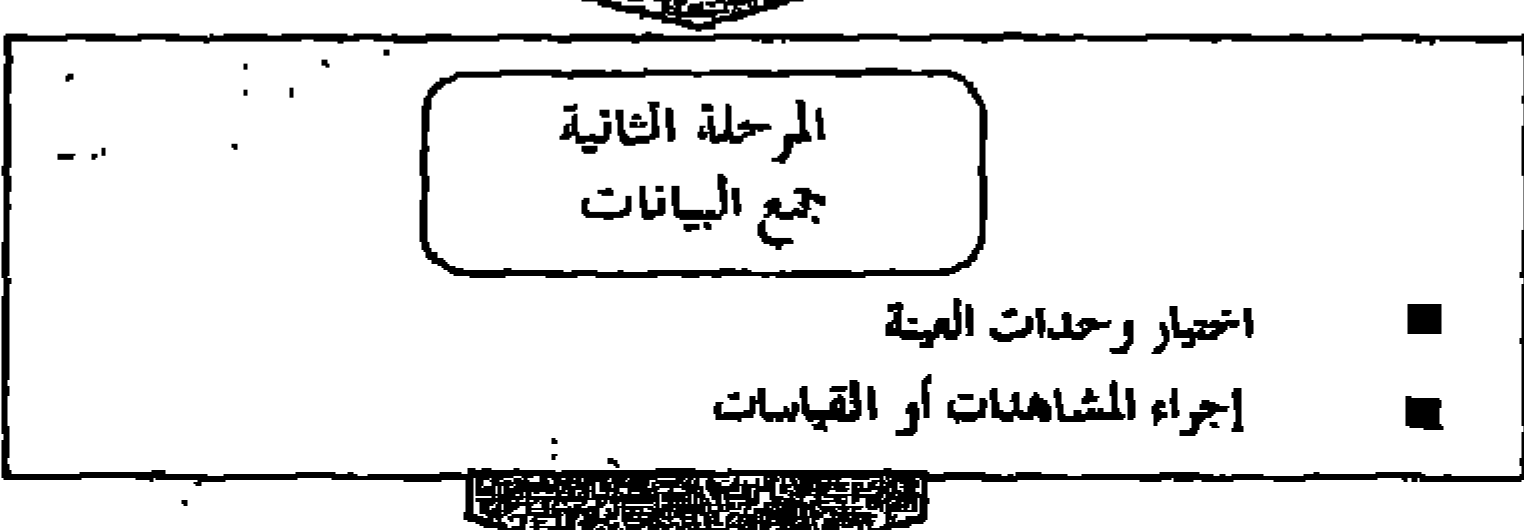
دروس فى

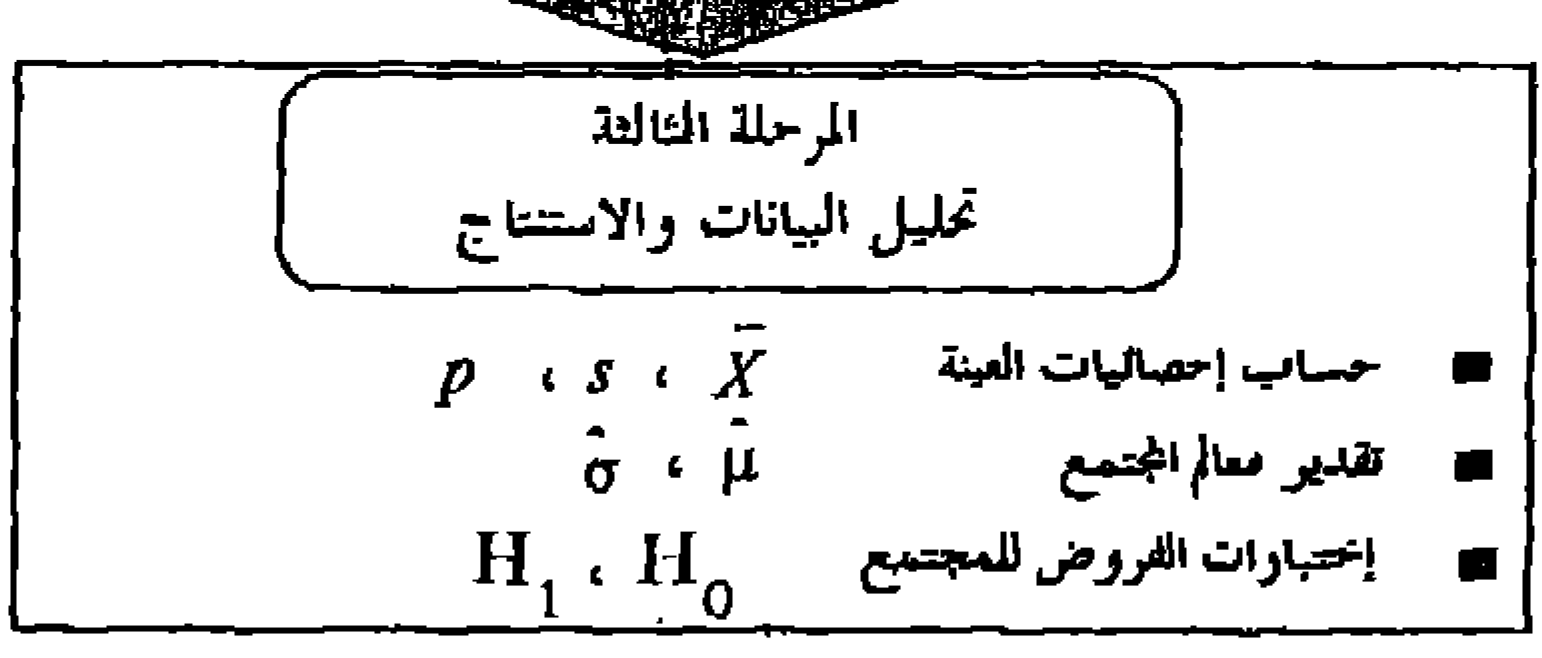
الإحصاء التطبيقى

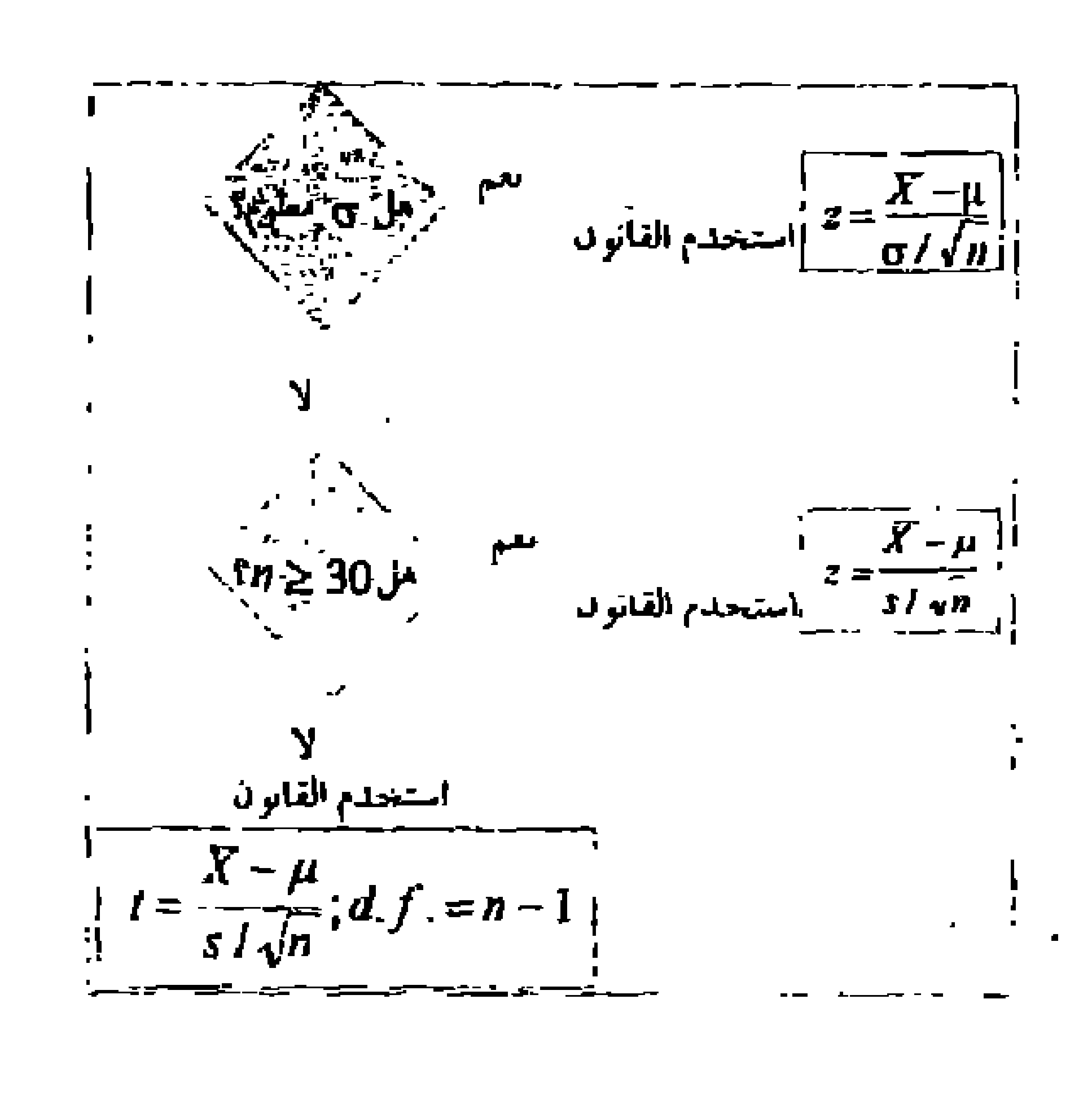
إعداد

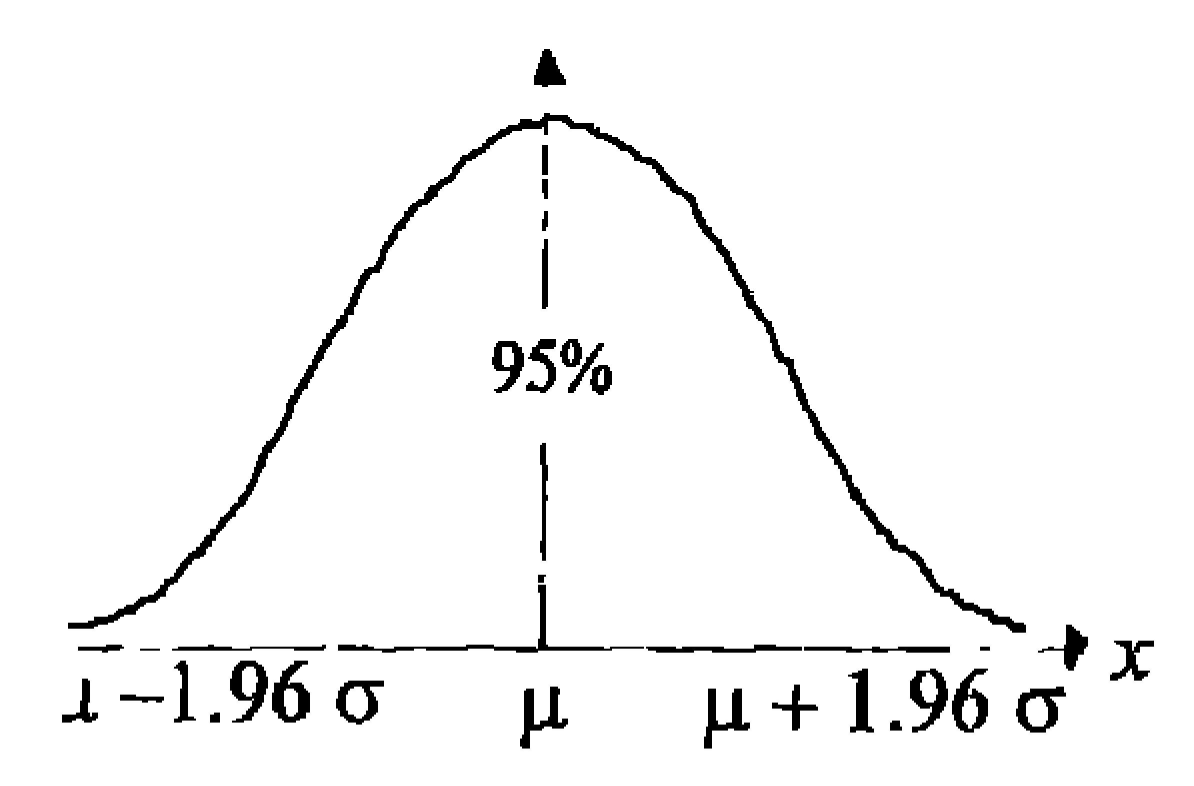
أ.د. على نصر السيد الوكيل

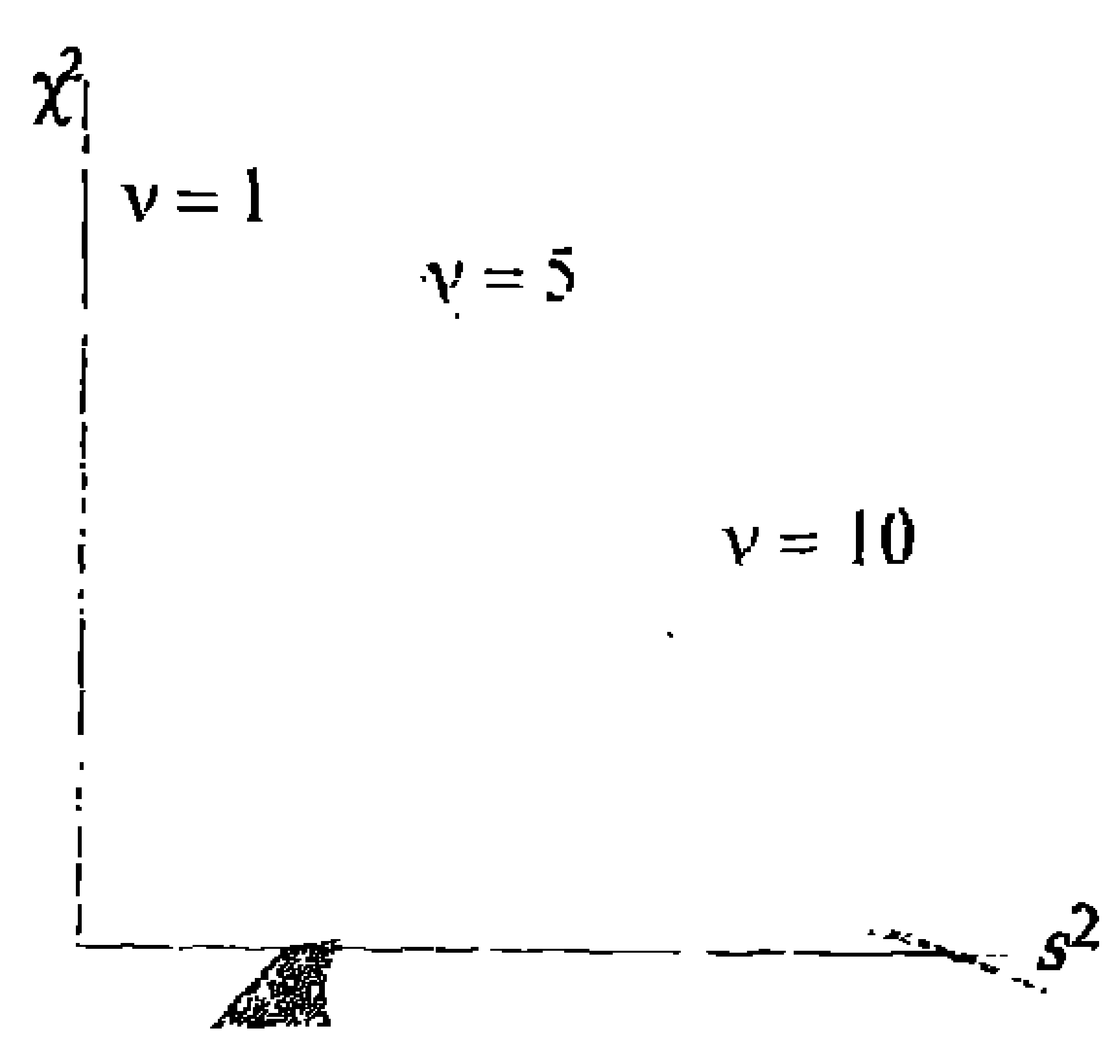


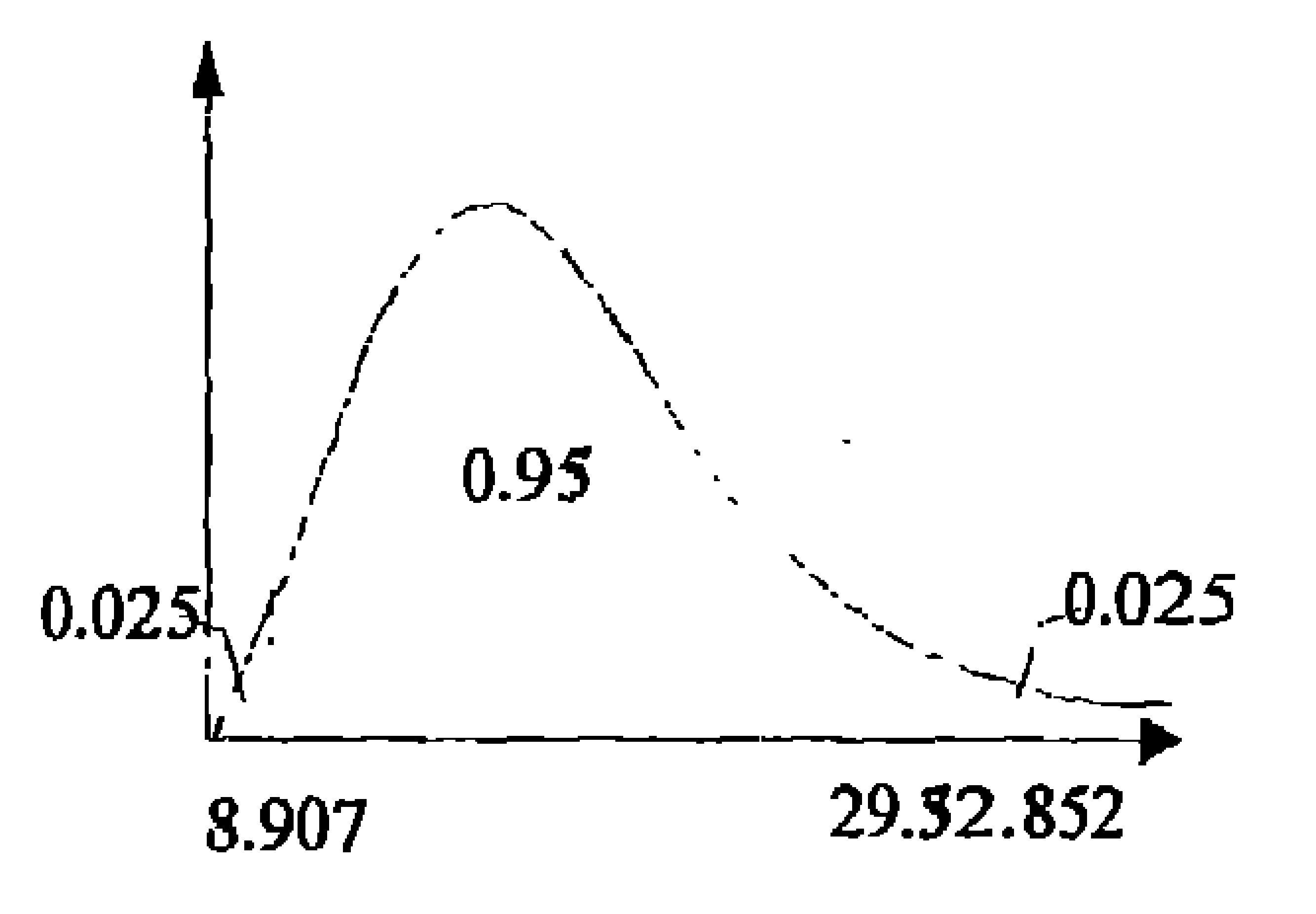












٢٠١١

رقـم الإيـداع
١٩٠١١ / ٢٠١٠
دار المصطفى للطباعة بنها الجديدة ت: ٠١٣/٣٢٢٣٨٣٦٠

الدرس الأول
طرق المعاينة
SAMPLING TECHNIQUES

١-١ المجتمع والعينة Population and Sample

يقصد بتعبير المجتمع فى علم الإحصاء مجموعة من الوحدات (أفراد – أشياء – عمليات – أحداث ... إلخ)؛ فمثلا:

- مجموعة الموظفين فى شركة من الشركات تُكَوِّن مجتمعا.
- كل المواطنين المسجلين فى كشوف الانتخاب فى دائرة من الدوائر يُكَوِّنون مجتمعا.
- كل السيارات من طراز معين تُكَوِّن مجتمعا.
- كل المشترين لمنتج معين يُكَوِّنون مجتمعا.
- مجموعة فئران التجارب فى معمل من المعامل البيولوجية تُكَوِّن مجتمعا.
- مجموعة العمليات البنكية فى شهر من الشهور تُكَوِّن مجتمعا.

فإذا كان المجتمع الذى نود دراسته إحصائيا ذا حجم صغير فإنه من الممكن أن نقيس متغيرا ما لكل وحدات المجتمع ونسمى نتيجة تلك القياسات **تعدادا** ***census***.

من جهة أخرى إذا كان حجم المجتمع قيد الدراسة كبيرا أو صعب الوصول إلى كل وحداته أو بعضها فإننا نلجأ عندئذ إلى اختيار جزء صغير (مجموعة جزئية) منه ممثلا للمجتمع يسمى **عينة** ***sample*** ونقصر قياساتنا على وحدات (عناصر) تلك العينة.

ولكى نعمم نتائج قياساتنا للعينة على المجتمع بأكمله نستخدم ما يسمى بـ **الاحصاء الاستدلالى** ***inductive statistics*** (***inferential statistics***).

وبالطبع فإنه من الأرخص والأسرع قياس جزء من المجتمع بدلا من كل المجتمع ولكن يجب أن نكون على حذر من اختيار عينة غير ممثلة للمجتمع.

٢-١ دواعى اتخاذ عينة Incentives for Taking a Sample

توجد دواع لاتخاذنا عينة بدلا من المجتمع بأكمله. من هذه الدواعى ما يلى:

الاقتصاد

لا شك أن أخذ قياسات على جزء من المجتمع أقل تكلفة من أخذ تلك القياسات على كل المجتمع؛ فمثلا إرسال استبيان لكل المتعاملين مع شركة تجارية حول منتج جديد يكلف الشركة نفقات طبع الاستبيان وإرساله بالبريد وفرز الردود وتبويبها فضلا عن احتمال إهمال جزء كبير من العملاء للرد على الاستبيان. وبالطبع تقل تلك النفقات عند اختيار عينة تمثل عملاء الشركة تمثيلا جيدا.

الوقت

أحيانا يكون عامل الوقت مُهمًا إذ قد تُلزم ظروف المنافسة اتخاذ قرار طرح منتج جديد بناء على معلومات من عينة محدودة بدلا من انتظار ردود كل العملاء.

حجم المجتمع

بعض االمجتمعات الإحصائية تكون ذا حجم ضخم لا يمكن معه إجراء إحصاء شامل على المجتمع بأكمله؛ فمثلا مجتمع طلاب المرحلة الثانوية في دولة معينة يكون ذا حجم كبير قد لا يمكننا معه إجراء استقصاء لكافة ميولهم وتوجهاتهم المستقبلية وما يترتب على ذلك من ترتيبات للتخطيط لمستقبلهم. لذا يكفى هنا أخذ عينة ممثله لهذا المجتمع.

صعوبة الوصول لبعض مفردات المجتمع

بعض المجتمعات تحتوى عناصر يصعب مشاهدتها أو إجراء قياسات عليها. فمثلا عند دراسة ميول المستهلكين لبعض المنتحات لا يمكن استبيان كل المتوقع استخدامهم لتلك المنتجات؛ فمنهم من يكون داخل وحدات عسكرية أو فى السجون أو داخل مستشفيات.

الطبيعة المدمرة لبعض المجتمعات

فى بعض الأحيان تكون مشاهدة أو قياس عناصر مجتع ما لايتحقق إلا بتدميرها؛ فمثلا اختبار صلاحية رصاصات البنادق أو رؤوس الصواريخ لا يمكن إجراؤه إلا بإطلاقها، قياس أعمار المصابيح الكهربية لا يكون إلا باستخدامها فعلا. لذا تؤخد عينة من كل دفعة من الإنتاج وتختبر ثم تعمم نتائج الاختبار على كل الإنتاج.

الدقة

أحيانا يكون إجراء إحصاء شامل لكل عناصر مجتمع ما بغير عناية كافية ربما يؤدى إلى معلومات خاطئة عن المجتمع؛ فمثلا عمل احصاء لأفراد مدينة ما بهدف تقدير الدعم الحكومى للمواد التموينية بدون التحقق من صحة الوثائق ربما يدفع بعض الأسر بإعطاء بيانات مبالغ فيها، بينما أخذ عينة مختارة بعناية وإجراء القياسات عليها يعطى معلومات أكثر دقة.

١-٣ إجراء الدراسة للمعاينة Conducting a Sample Study

حتى نحصل على الفائدة المرجوة من إجراء المعاينة تلزمنا ثلاث مراحل متعاقبة وهى:

- المرحلة الأولى : التخطيط للمعاينة.
- المرحلة الثانية : جمع البيانات
- الموحلة الثالثة : تحليل البيانات والاستدلال.

المرحلة الأولى التخطيط

- ☐ تحديد المجتمع — تصميم إطار – دراسة وصفية أو كمية
- ☐ اختيار أسلوب المشاهدة أو القياس — تصميم استبيان – إعداد أدوات القياس
- ☐ اختيار نوع العينة — حكمية – عشوائية:بسيطة – طبقية
- ☐ اختيار الأسلوب الإحصائى — التقدير – الاختبار الإحصائى
- ☐ إيجاد حجم العينة المطلوبة — ضبط درجة الدقة – حساب التكلفة

المرحلة الثانية جمع البيانات

- ☐ اختيار وحدات العينة
- ☐ إجراء المشاهدات أو القياسات

المرحلة الثالثة تحليل البيانات والاستدلال

- ☐ إجراء إحصاءات العينة $\bar{X}$ ، s ، p
- ☐ تقدير معالم المجتمع $\hat{\mu}$ ، $\hat{\sigma}$
- ☐ اختيارات الفروض للمجتمع H_0 ، H_1

ويقصد بتصميم إطار وسيلة نحدد بها ما إذا كان عنصر ما ينتمى أو لا ينتمى للمجتمع قيد الدراسة، فقد يتمثل فى كشوف الناخبين أو قوائم الطلاب ...إلخ.

ورغم أهمية تحديد إطار للمجتمع، إلا أنه فى بعض المجتمعات قد يكون اختيار إطار صعبا أو مستحيلا؛ فمثلا مجتمع المترددين على إحدى الدوائر الحكومية، مجتمع المدخنين فى دولة ما... ألخ

٤-١ خطأ المعاينة Sampling Error

باختيارنا عينة مناسبة نتوقع أن تعكس هذه العينة خصائص المجتمع الذى تمثله. ومع ذلك لا يوجد ضمان أن العينة تمثل المجتمع تمثيلا تاما. ويعتبر خطأ المعاينة السبب الرئيسى فى عدم تمثيل العينة للمجتمع تمثيلا تاما. وهذا الخطأ ينشأ من عاملين هما:

◆ الصدفة Chance

قد تلعب الصدفة دورا كبيرا فى خطأ المعاينة، ولنضرب لذلك مثلا:

لنفرض أننا دخلنا ناديا من النوادى الرياضية وأردنا أن نحسب متوسط أطوال الشباب فى هذا النادى واخترنا مجموعة من الشباب بطريقة عشوائية وتصادف أن هؤلاء الشباب فى فريق كرة السلة، ففى هذه الحالة يكون متوسط الأطوال المقاسة أكبر من المتوسط الحقيقى لأطوال شباب النادى.

◆ التحيز Bias.

التحيز فى اختيار عينة هو الميل لتفضيل فئة معينة من فئات المجتمع. وينشأ التحيز عادة من سوء التخطيط للمعاينة، ولنضرب لذلك مثلا: لنفرض أن شركة من الشركات تريد استطلاع رأى جمهور المتعاملين معها فى منتج غذائى جديد. من السهل على الشركة أن ترسل مندوبين لاستطلاع رأى ربات البيوت فى هذا المنتج. ولكن هذا الاختيار يعتبر اختيارا منحازا حيث تمثل العينة المختارة نسبة ضئيلة من جمهور المتعاملين فضلا عن أن من بيده اتخاذ قرار الشراء ليس دائما فى أيدى ربات البيوت.

١-٥ اختيار العينة Selecting Samples

إن اتباع أسلوب معين لاختيار عينة من مجتمع يعتمد على عاملين أساسيين هما تجنب الخطأ وتوفير النفقات. وهذين العاملين على طرفي نقيض بمعنى أن زيادة الدقة لتجنب الخطأ تستلزم إنفاقا أكثر، كما أن الحرص على توفير النفقات يؤدى إلى دقة أقل. هذا، وتوجد طريقتين رئيسيتين لاختيار العينة وهما:

- الطريقة العشوائية Random Sampling.
- العينة الحكمية Judgment Sampling.

١-٥-١ العينة العشوائية وطرق اختيارها Random Sample and its Techniques

فى هذه الطريقة يكون لكل عناصر المجتمع فرصا متساوية لأن يكونوا داخل العينة. أى أن احتمال اختيار أى عنصر ليكون داخل العينة يكون ثابتا. وتتشعب طرق اختيار عينة عشوائية إلى الآتى:

(أ) الطريقة العشوائية البسيطة Simple Random Sampling

هذه الطريقة هى الأبسط والأكثر استخداما وهى الأساس لما يليها من الطرق. وتتلخص هذه الطريقة فى عمل وريقة لكل عنصر من عناصر المجتمع وتخلط الوريقات وتوضع فى سلة ونسحب عددا من الوريقات واحدة بعد أخرى بدون إحلال وبذلك تكون لكل عنصر باق بعد أى سحبة نفس احتمال اختياره بعد ذلك. هذا إذا كان حجم المجتمع صغير نسبيا.

أما إذا كان حجم المجتمع كبيرا فإننا نلجأ إلى استخدام **جدول الأرقام العشوائية** ***random number tables***؛ فمثلا الجدول الآتى يمثل أعدادا عشوائية كل منها مكون من خمسة أرقام:

صف \ عمود	1	2	3	4	5	6
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646
2	22368	46573	25595	85393	30995	89198
3	24130	48360	22527	97265	76393	64809
4	42167	93093	06243	61680	07856	16376
5	37570	39975	81837	16656	06121	91782
6	77921	06907	11008	42751	27756	53498
7	99562	72905	56420	69994	98872	31016
8	96301	91977	05463	07972	18876	20922
9	89579	14342	63661	10281	17453	18103
10	85475	36857	53342	53988	53060	59533
11	28918	69578	88231	33276	70997	79936
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488

لكي نختار عينة من عشرة عناصر من مائة عنصر نعطى كل عنصر عددا مكون من رقمين من 00 إلى 99 ثم نختار عشرة من تلك الأعداد بأن نبدأ من أى موضع من الجدول كالآتى:

صف \ عمود	1	2	3	4	5	6
1	10480	15011	01536	02011	81647	91646
2	22368	**46573**	25595	85393	30995	89198
3	24130	**48360**	22527	97265	76393	64809
4	42167	**93093**	06243	61680	07856	16376
5	37570	**39975**	81837	16656	06121	91782
6	77921	**06907**	11008	42751	27756	53498
7	99562	**72905**	56420	69994	98872	31016
8	96301	**91977**	05463	07972	18876	20922
9	89579	**14342**	63661	10281	17453	18103
10	85475	**36857**	53342	53988	53060	59533
11	28918	**69578**	88231	33276	70997	79936
12	63553	40961	48235	03427	49626	69445
13	09429	93969	52636	92737	88974	33488

ثم بعد ذلك نأخذ أول رقمين من اليمين أو من اليسار مع مراعاة عدم التكرار كالآتى:

46573
48360
93093
39975
06907
72905
91977
14342
36857
69578

وبذلك تكون الأعداد المختارة كعينة هى :

46 ، 48 ، 93 ، 39 ، 06

72 ، 91 ، 14 ، 36 ، 69

(ب) **الطريقة المنظومية Systematic Sampling**

إن التطبيق العملى للطريقة العشوائية البسيطة يتمثل فى وجود إطار ويتوقف على حجم المجتمع. وتعتبر الطريقة المنظومية تقريبا جيدا لتلك الطريقة؛ فمثلا إذا أردنا أن نختار عينة حجمها ٢٥ من مجتمع حجمه ١٠٠٠ فإننا نحسب المعامل:

$$k = \frac{\text{حجم المجتمع}}{\text{حجم العينة}} = \frac{1000}{25} = 40$$

وعليه نختار العناصر بفارق ٤٠ بينها. فلنفرض أننا اخترنا أول عنصر ليكون رقم 31 فيكون العنصر التالى رقم 71، والذى تليه رقم 111، والذى تليه رقم 151، ... وهكذا. ويجب أن نتجنب الرتابة لئلا توضع قاعدة قد تستغل استغلالا سيئا.

(ج) الطريقة الطبقية Stratified Sampling

مع أن دقة نتائج العينة تزداد بازدياد حجمها إلا أن ذلك يتطلب زيادة فى النفقات. وتعتبر الطريقة الطبقية وسيلة من وسائل زيادة دقة النتائج بدون زيادة حجم العينة. وهذه الطريقة تضمن التمثيل الجيد للعينة لكل طبقات وشرائح المجتمع.

وتعتبر **العينة الطبقية** ***stratified sample*** أكثر تمثيلا للمجتمع حيث يُقسَّم المجتمع إلى **طبقات** ***strata*** ثم تختار من كل طبقة عينة عشوائية بحيث يتناسب عدد الوحدات التى تختار من كل طبقة مع عدد الوحدات داخل تلك الطبقة. ويكون ويكون معامل التناسب ثابت فى كل الطبقات. أى أن:

$$\frac{\text{حجم العينة فى كل طبقة}}{\text{الحجم الكلى للطبقة}} = k(\text{ثابت})$$

مثال

لنفرض أننا نريد اختيار عينة من 400 موظف بشركة يبلغ حجم الموظفين بها 6000 موظف لاتباع نظام جديد للأجور بناء على الإنتاج. وليكن العاملان المؤثران فى الاختيار هما درجة المهارة والجنس وليكن الجدول الآتى ممثلا للتقسيم المطلوب:

	ذكر	أنثى	المجموع
ماهر	2400	330	2730
نصف ماهر	1290	660	1950
غير ماهر	300	1020	1320
المجموع	3990	2010	**6000**

$$k = \frac{400}{6000} = \frac{1}{15}$$

إذن يكون مطلوبا أن نأخذ من كل طبقة من حجمها، وبذلك نستطيع تكوين الجدول التالى لحجم المأخوذ للعينة من كل طبقة:

	ذكر	أنثى	المجموع
ماهر	160	22	182
نصف ماهر	86	44	130
غير ماهر	20	68	88
المجموع	266	134	**400**

(د) طريقة التجمعات **Cluster Method**

فـى هـذه الطريقـة لا تختـار العناصـر بطريقـة فرديـة ولكـن علـى هيئـة **تجمعـات** ***clusters***. فمثلا إذا أردنـا أخـذ عينـة من مدينـة كبيـرة يكون مـن المناسب أن تقسم المدينة إلى أحياء، وكل حى يقسم إلى مناطق وكل منطقـة إلـى شوارع ...وهكذا. ثم نختـار حيـا أو اثنين عشوائيا ومـن كل حـى منهمـا نختـار منطقـة عشوائيا ومـن كل منطقة نختار شارعا عشوائيا وبذلك يسهل علينا اختيار العينة التى تؤخذ من أماكن متجاورة فتنخفض النفقات ويختصر الوقت. ويستحسن أن يراعى هنا أن العناصر النهائية تكون غير متشابهة وإلا فلا تتحقق العشوائية.

(هـ) المعاينة على مراحل **Multistage Sampling**

هذه الطريقة هى امتداد لطريقة التجمعات وتستخدم عندما يكون حجم المجتمع الذى تختـار منـه العينـة ضـخما ومترامـى الأطـراف. فمثلا إذا أردنـا أن تستطلع رأى الجمهور على مستوى دولة بأكملها فى جريدة جديدة فإننا نختار عددا محدودا من المحافظـات والمـدن يراعـى فيهـا أن تكـون ممثلـة للظـروف السكانية والمناخيـة المختلفة، ثم نختار من كل محافظة أو مدينـة منهـا حيا من الأحياء، ومن كل حى شارع ... وهكذا ونطلق الاستبيان فى العينة المختارة نهائيا.

١-٥-٢ العينة الحكمية **Judgment Sample**

فى هذه الطريقة يقرر آخذ العينة مسبقا العوامل المرجحة لاختيار عناصر العينة. وتتخذ هذه الوسيلة عندما يكون المجتمع على درجة عالية من عدم التجانس أو عندما تحكم الظروف بأخذ عينة صغيرة أو عندما يتطلب الأمر توافر خبرات معينة فى أخذ القياسات. ومن الواضح أن الطريقة الحكمية أقرب ما تكون إلى التحيز لذا لا تلجأ إليها إلا عند الضرورة.

وفى المعاينة الحكمية فإن القائم بالمعاينة يقرر مسبقا ما هى العوامل التى على أساسها يختار أو لا يختار العنصر داخل العينة. وتتبع الطريقة الحكمية عندما يكون المجتمع غير متجانس لدرجة كبيرة أو إذا كانت مهارات أو صفات معينة ضرورية لصدق تمثيل العينة للمجتمع. ويعيب هذه الطريقة هو أننا لا نجد سبيلا لتقدير دقة النتائج التى نحصل عليها. هذا، ومن أهم تطبيقات المعاينة الحكمية **طريقة الأنصبة** ***quota sampling***.

طريقة الأنصبة **Quota sampling**

تستخدم هذه الطريقة بكثرة فى التسويق واستطلاع الرأى. وتختلف تلك الطريقة عن طريقة الطبقات أن العينات لا تختار عشوائيا من الطبقات.

مثال

الآتى بعد هو تقسيم طلاب كلية من الكليات إلى أقسام حسب الجنس والسن وصفوف الدراسة:

الصف	الجنس	السن	
		تحت العشرين	عشرون فما فوقها
1	ذكر	75	90
	أنثى	60	63
2	ذكر	124	32
	أنثى	86	29
3	ذكر	73	44
	أنثى	59	30
4	ذكر	77	59
	أنثى	90	59

(أ) يراد إنشاء عينة أنصبة من 70 طالبا تعكس كل صفات هذا المجتمع. احسب العدد فى كل نصاب.

(ب) لنفرض أننا قررنا أن السن والجنس ليسا مهمين فى أخذ العينة، فكيف تتأثر الأنصبة؟ من 70 طالبا تعكس كل صفات هذا المجتمع. احسب العدد فى كل نصاب.

مثال

(أ) بأخذ كل نصاب مساويا نسبة ثابتة من كل تقسيم نجد أن:

$$k = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع}} = \frac{70}{1050} = 1/15$$

نقسم كل عدد على 15. وتلافيا للكسور نقرب النتائج إلى أقرب عدد صحيح فنحصل على الجدول الآتى:

الصف	الجنس	السن	
		تحت العشرين	عشرون فما فوقها
1	ذكر	5	6
	أنثي	4	4
2	ذكر	8	2
	أنثي	6	2
3	ذكر	5	3
	أنثي	4	2
4	ذكر	5	4
	أنثي	6	4

بهذا الجدول تكون المعلومات الأساسية متوفرة للقائم بعمل الاستبيان وما عليه إلا أن يجرى الاستبيان مع من يجده من الأفراد فى كل نصاب.

(ب) إذا كان السن والجنس ليسا مهمين فى أخذ العينة فإننا نحصل على الجدول الآتى:

الصف الأول	19
الصف الثانى	18
الصف الثالث	14
الصف الرابع	19

ونظريا فإن العينة المأخوذة بطريقة الأنصبة لا تعتبر عينة عشوائية ولكن كثير من باحثى التسويق يعتبرونها وسيلة سهلة ورخيصة وسريعة لأخذ عينة!

١-٦ الاستبيانات Questionnaires

يعد الاستبيان وسيلة هامة جدا فى المعاينة. ويجرى الاستبيان بإحدى الطريقتين الآتيتين:

- ❑ إرسال الاستبيان بالبريد العادى أو البريد الإلكترونى.
- ❑ عن طريق مقابلات شخصية.

والجدول الآتى يبين مزايا كل من الطريقتين وعيوبهما:

	إرسال الاستبيان بالبريد الإلكترونى		إجراء الاستبيان عن طريق مقابلات شخصية
▲	تكلفة إرسال الاستبيان بالبريد الإلكترونى أقل من إجراء مقابلات شخصية خاصة إذا كانت الموارد محدودة أو إذا كان المجتمع مترامى الأطراف. ويمكن من باب الاحتياط تكبير حجم العينة التى يجرى عليها الاستبيان.	▼	نقطة الضعف الأساسية فى إجراء مقابلات شخصية هى تكلفتها ليس فقط فى أجر من يقومون بإجراء المقابلات ولكن فى تكلفة تدريبهم.
▲	هذه الطريقة أسرع نسبيا حيث من المتوقع أن تصل الردود خلال ثلاثة أيام من إرسال الاستبيان.	▼	هذه الطريقة قد تستغرق بعض الوقت خاصة إذا تطلب الأمر سفر القائمين بالاستبيان.
▲	ضمان عدم تأثر المستبين برأى القائم بإجراء الاستبيان	▼	يخشى تأثر المستبين برأى أو تلميحات القائم بالاستبيان. لذا يجب على القائم بالاستبيان التزام الحيدة وألا تظهر على تلميحات وجهه أى تلميحات.
▼	يخشى أن يهمل الرد تماما مما يعطى انطباعا خاطئا باتجاهات معينة.	▲	طريقة المقابلات الشخصية أحرى أن تجد استجابة عالية، فمن طبيعة البشر الميل لعدم رد السائلين خاصة إذا أحسن تدريبهم. ذلك فضلا عن استعداد القائمين بالاستبيان لمساعدة المستبين إذا التبس عليه أمر من الأمور.

هذا، وربما يكون من المفيد إجراء الاستبيان عن طريق التليفون الأرضى أو المحمول. غير أن هذه الوسيلة تتطلب تدريبا عاليا للقائمين على الاستبيان.

١-٦-١ تصميم الاستبيان Design of Questionnaire

قبل أن نخوض فى تصميم الاستبيانات بالبريد يجدر بنا أن نذكر المبادئ الآتية:

١. لابد أن يقدم له بخطاب قصير يوضح الغرض من الاستبيان ويؤكد سرية البيانات.
٢. لابد أن يكون الرد بسهولة ويسر حتى لا يضيع وقت الشخص المستبين فى البحث عن كيفية إرساله.
٣. يستحسن أن يكون هناك مقابل رمزى لتجاوب المستبين.

أما تصميم الاستبيان نفسه فلابد أن يحقق الشروط الآتية:

١. لابد أن تكون الأسئلة واضحة ومختصرة ويسهل إجابتها وأن نتجنب أى كلمات تسبب الضيق أو الإحراج.
٢. يجب ألا تصاغ الأسئلة بطريقة يفهم منها استدراج المستبين إلى اتجاه معين.
٣. يستحسن أن نتجنب الأسئلة التى تتطلب قدح الذاكرة أكثر من اللازم.
٤. يستحسن أن تختار الأسئلة ذات الاختيار من متعدد مثل" كم موظف عندك فى جدول المرتبات؟"

أقل من ١٠٠	من ١٠٠ إلى ٥٠٠	أكثر من ٥٠٠
☐	☐	☐

تمرين ١

١. تستخدم طرق المعاينة كثيرا فى تجميع البيانات فى الصناعة وإدارة الأعمال. اشرح كلا من الطرق الآتية معطيا أمثلة لكل منها:

(أ) المعاينة العشوائية البسيطة. (ب) المعاينة متعددة المراحل.

(ج) المعاينة الطبقية. (د) المعاينة بطريقة الأنصبة.

٢. ماذا يقصد بـ "إطار المعاينة". اقترح إطارا للمعاينة فى كل حالة من الحالات الآتية:

(أ) دراسة اتجاهات العاملين فى مصنع كبير نحو مقترح جديد لنظام الورديات.

(ب) مسح لآراء طلاب كلية من الكليات فى ملائمة المناهج وكفاءة المعلمين.

(ج) استفسار عن استخدام التلاميذ فى مدينة كبيرة للحاسبات الشخصية.

٣. اشرح باختصار مع إبداء الأسباب طريقة المعاينة الملائمة لكل حالة من حالات المسألة رقم ٢.

٤. اشرح باختصار موضحا الأسباب طريقة المعاينة لكل مثال من الأمثلة الواردة بالسؤال رقم ٣.

٥. ماهى المراحل الثلاثة لإجراء معاينة فى مجتمع ما. اشرح كل مرحلة بإيجاز.

٦. الجدول الآتى يمثل تصنيفات الطلاب فى كلية من الكليات من حيث الصف والتخصص والنوع (طالب – طالبة):

الصف	النوع	التخصص		
		ادارة	نظم معلومات	علوم حاسب
1	طالب	90	200	30
	طالبة	70	160	12
2	طالب	120	160	24
	طالبة	80	130	8
3	طالب	140	120	14
	طالبة	80	110	10
4	طالب	100	160	16
	طالبة	60	100	6

يراد أخذ عينة مكونة من 100 طالب وطالبة على أن تكون ممثلة لكل التصنيفات.
أكتب جدول يبين الأعداد المختارة من كل صنف بطريقة الأنصبة.

٧. يراد اختيار 400 موظف من موظفى شركة كبيرة لإجراء استفتاء حول تغيير نظام المرتبات ليكون مرتبطا بالإنتاجية. ولقد تقرر أن يكون الاختيار متوقفا على عدة عوامل هى النوع (ذكر – أنثى) ودرجة التعلم (تعليم متوسط – تعليم عالى) ودرجة المهارة (ماهر – نصف ماهر – عديم المهارة). فإذا كان تصنيف الموظفين ممثلا بالجدول الآتى:

	تعليم متوسط		تعليم عالى	
	ذكر	أنثي	ذكر	أنثي
ماهر	1500	900	180	150
نصف ماهر	900	390	360	300
عديم المهارة	150	150	720	500

فبين كيف تؤخذ عينة لتكون ممثلة للمجتمع.

الدرس الثانى
توزيعات المعاينة
SAMPLING DISTRIBUTIONS

٢ـ١ معالم المجتمع وإحصاءات العينة
Population Parameters and Sample Statistics

المَعلمة ***parameter*** هى مقياس وصفى للمجتمع ؛ فالمتوسط μ والتباين σ لتوزيع طبيعى هما مثالان من أمثلة مَعلمات المجتمع. وفى المجتمعات ذات الأحجام الضخمة فإن المتوسط والتباين الحقيقيين للمجتمع قد لا يكونان معلومان ولابد من تقديرهما من خلال عينات ممثلة للمجتمع.

أما الإحصاءة ***statistic*** فهى مقياس عددى للعينة وتحسب عن طريق مشاهدات لها ، فالمتوسط $\overline{X}$ والتباين s هما مثالان من أمثلة إحصاءات العينة. ونحن نستخدم المعلومات المستخرجة من إحصاءات العينة لنستدل على معلمات المجتمع التى تمثله.

٢ـ٢ المعاينة كتجربة عشوائية Sampling as a Random Experiment

فى تجربة إلقاء زهر طاولة فإن فضاء النواتج هو:

$$S = \{1,2,3,4,5,6\}$$

لنفرض الآن أننا أخذنا عينات من ثلاثة نواتج من فضاء العينة. فيكون لدينا $^6C_3 = 20$ عينة هى:

$$\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,3,4\},\{1,3,5\},\{1,3,6\},$$
$$\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,5,6\},\{2,3,4\},\{2,3,5\},\{2,3,6\},\{2,4,5\},$$
$$\{2,4,6\},\{2,5,6\},\{3,4,5\},\{3,4,6\},\{3,5,6\},\{4,5,6\}.$$

اختيار عينة من هذه العشرين هو فى حد ذاته تجربة عشوائية.

٢ـ٣ التوزيع الاحتمالى لمتوسطات العينات Sampling Distribution of the Mean

قلنا أن اختيار عينة من مجتمع هو فى حد ذاته تجربة عشوائية. والآن نبحث حساب متوسط نواتج هذه التجربة العشوائية.

فى تجربة إلقاء زهر طاولة فإن متوسط النواتج الممكنة هو:

$$\mu = \frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$$

إذا أخذنا المتوسطات للعينات ذات الثلاث نواتج فإننا نجد أن المتوسط لكل عينة يختلف باختلاف العينة وهو مبين بالجدول الآتى:

ولحساب المتوسط لهذا التوزيع نُكَوِّن الجدول الآتى:

العينات	$\bar{X}$	f	$\bar{X}f$
{1,2,3}	2	1	6/3
{1,2,4}	7/3	1	7/3
{1,2,5}, {1,3,4}	8/3	2	16/3
{1,2,6},{1,3,5},{2,3,4}	3	3	27/3
{1,3,6},{1,4,5},{2,3,5}	10/3	3	30/3
{1,4,6},{2,3,6},{2,4,5}	11/3	3	33/3
{1,5,6},{2,4,6},{3,4,5}	4	3	36/3
{2,5,6},{3,4,6}	13/3	2	26/3
{3,5,6}	14/3	1	14/3
{4,5,6}	5	1	15/3
		20	70

إذن متوسط هذا التوزيع يساوى $\frac{70}{20}=\frac{7}{2}$ أى يساوى متوسط النواتج.

٢-٤ تباين التوزيع الإحصائى لمتوسطات العينات
Variance of Sampling Distribution of the Means

فى تجربة إلقاء زهر طاولة فإن تباين النواتج الممكنة هو:

$$\sigma^2=\frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2}{6}-\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{91}{6}-\frac{49}{4}=\frac{182-147}{12}=\frac{35}{12}$$

والآن لحساب تباين التوزيع الإحصائى لمتوسطات العينات ذات الثلاث نواتج فإننا نكون الجدول الآتى: ⇦

$\bar{X}$	f	$\bar{X}f$	$\bar{X}^2f$
2	1	6/3	36/9
7/3	1	7/3	49/9
8/3	2	16/3	64/9
3	3	27/3	243/9
10/3	3	30/3	300/9
11/3	3	33/3	363/9
4	3	36/3	432/9
13/3	2	26/3	338/9
14/3	1	14/3	196/9
5	1	15/3	225/9
	20	70	770/3

من الجدول نجد أن تباين توزيع المتوسطات هو:

$$\frac{77}{6}-\frac{49}{4}=\frac{154-147}{12}=\frac{7}{12}$$

وهذا يختلف عن تباين النواتج.

والنظرية الآتية تبين كيف نحسب تباين توزيع المعاينة من تباين النواتج لمجتمع صغير نسبياً:

نظرية

لنفرض أن لدينا مجتمعا حجمه N ومتوسطه μ وتباينه σ^2، وأخذنا من هذا المجتمع جميع العينات الممكنة ذات حجم n بدون إحلال، فإن توقع متوسط توزيع المعاينة الناتج هو:

$$E(\bar{x}) = \mu$$

وتباينه هو:

$$V(\bar{x}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \frac{\sigma^2}{n}$$

ففى المثال السابق $N = 6$ ، $\mu = 7/2$ ، $\sigma^2 = 35/12$ ، $n = 3$. إذن:

$$E(\bar{x}) = \mu = 7/2,$$

$$V(\bar{x}) = \frac{6-3}{6-1} \cdot \frac{35/12}{3} = \frac{35}{60} = \frac{7}{12}$$

فى المجتمعات ذات الأحجام الضخمة تؤول قيمة المعامل $\frac{N-n}{N-1}$ إلى 1 ويصبح:

$$V(\bar{x}) = \sigma^2 / n \quad , \quad \sqrt{V(\bar{x})} = \sigma / \sqrt{n}$$

٢ـ٥ نظرية النهاية المركزية Central Limit Theorem

إذا أخذنا عينات حجمها n من مجتمع ذى توزيع طبيعى فإن التوزيع الإحصائى للعينة هو أيضا توزيع طبيعى. ولكن يمكن أن نثبت أنه إذا كان حجم العينة كبيرا فإن توزيع المعاينة للمتوسط يقترب من التوزيع الطبيعى حتى إذا أخذت العينات من مجتمع توزيعه ليس طبيعيا ويكون:

$$E(\bar{x}) = \mu \quad , \quad V(\bar{x}) = \sigma^2 / n$$

وفى المعتاد فإن حجم العينة إذا بلغ 30 أو أكثر فتنطبق عليها هذه النتيجة.

مثال (١)

إذا كانت أعمار نوع معين من بطاريات السيارات تتبع توزيعا إحصائيا ذا متوسط 30 شهرا وانحراف معيارى 9 شهور، وأخذت عينات ذات حجم 36 بطارية فاحسب المتوسط والتباين لتوزيع المعاينة وأوجد احتمال أن يكون المتوسط للعينة أكبر من 32 شهرا.

الحـــل

الحجم 36 للعينة يكفى لأن نعتبر التوزيع طبيعيا بمتوسط $\mu = 30$ وانحراف معيارى $\sigma = 9$.

$$Z(\bar{x} > 32) > \frac{32-30}{9/\sqrt{36}} = \frac{4}{3} = 1.33$$

نبحث فى جدول التوزيع الطبيعى عن المساحة التى تناظر 1.33 فنجد أن:

$P(z \geq 1.33) = 0.5000 - 0.4082 = 0.0918$

مثال (٢)

نص تقرير على أن الأطفال فى المرحلة العمرية بين سنتين وخمس سنوات يشاهدون التليفزيون 25 ساعة أسبوعيا في المتوسط. على فرض أن التوزيع طبيعى بانحراف معيارى 3 ساعات وأخذنا عينة من 20 طفلا فى تلك المرحلة العمرية، أوجد احتمال أن يتجاوز متوسط ساعات المشاهدة 26.3 ساعة.

الحـــل

$$n = 20, \mu = 25, \sigma = 3$$

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{26.3 - 25}{3/\sqrt{20}} = \frac{1.3}{0.671} = 1.94$$

$$P(\bar{x} > 26.3) = 0.5 - 0.4738 = 0.0262.$$

مثال (٣)

من المعلوم أن متوسط الدخل السنوى للمبرمجين يساوى L.E. 4000 بانحراف معيارى L.E.600. أخذت عينة عشوائية من 36 مبرمج من عدد من الشركات.

(أ) أوجد احتمال أن يقل متوسط الدخل فى العينة عن L.E.3750.

(ب) أوجد احتمال أن يكون متوسط فى العينة محصورا بين L.E.3750، L.E.4250.

(ج) أوجد احتمال أن يتجاوز متوسط فى العينة L.E.4150.

الحـــل

$$n = 36, \mu = 4000, \sigma = 600$$

(أ)

$$P(\bar{x} \leq 3750) = P\left(z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq \frac{3750 - 4000}{600/\sqrt{36}}\right)$$

$$= P\left(z \leq \frac{-250}{100}\right) = P(z \leq -2.5) = 0.0062$$

(ب)

$$P(3750 \leq \bar{x} \leq 4250) = P\left(\frac{3750 - 4000}{600/\sqrt{36}} \leq z \leq \frac{4250 - 4000}{600/\sqrt{36}}\right)$$

$$= P(-2.5 \leq z \leq 2.5) = 2P(0 \leq z \leq 2.5)$$

$$= 2 \times 0.4938 = 0.9876$$

(ج)

$$P(\bar{x} \geq 4150) = P\left(z \geq \frac{4150 - 4000}{600/\sqrt{36}}\right)$$

$$= P(z \geq 1.5) = 1 - 0.9932 = 0.0668$$

٢-٦ توزيعات المعاينة للنسب Sampling Distribution of Proportions

أحيانا يكون من الضرورى أن نبحث فى النسب؛ فقد يريد رئيس الشئون المالية فى شركة ما أن يحسب نسبة الفواتير التى تتعدى قيمتها L.E. 250 ، أو أن يعرف كم مطالبة نفقات غير مستوفاة للشروط المالية والإدارية.

لنفرض أن لدينا مجتمعا يحتوى على نسبة p من العناصر التى بها صفة تستحق الاهتمام (التالفة مثلا). إذا أخذنا عدة عينات ذات حجم n وأردنا أن نحسب نسبة العناصر التالفة فى كل عينة فإننا نستطيع أن نستفيد من نظرية النهاية المركزية بالصيغة الآتية:

إذا كان حجم العينة n كبيرا ، وكانت p (نسبة التالف فى المجتمع) ليست قريبة من 0 أو 1 فإن $\hat{p}$ (نسبة التالف فى العينة) تقرب من التوزيع الطبيعى بمتوسط p وتباين $p(1-p)/n$.

مثال (١)

وجد أن نسبة الشفاء من مرض ما إذا أعطوا علاجا معينا هى 80%. إذا أعطينا هذا العلاج لعينة عشوائية من 64 يعانون من المرض:

(أ) ما هو المتوسط والانحراف المعيارى للمرضى الذين يُشفون؟

(ب) ما هو احتمال أن يُشفى أقل من 50 مريضا؟

الحــل

(أ) $p = 0.8$ ، $n = 64$. إذن توزيع العينة له متوسط 0.8 وانحراف معيارى:

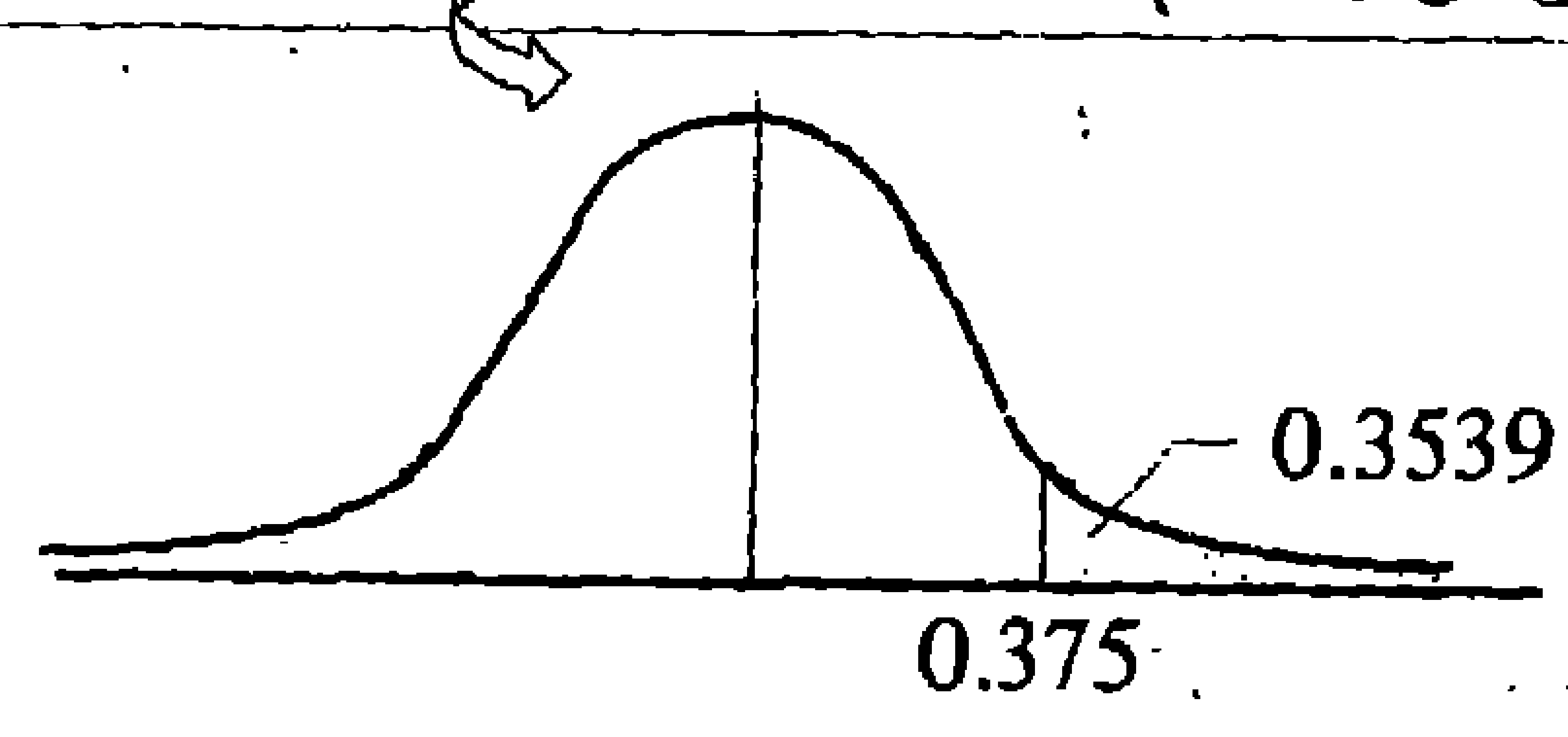
$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.8\times 0.2)/64} = \sqrt{0.0025} = 0.05$$

(ب)

$$P(\hat{p} < 0.78125) = P\left(z = \frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}} < \frac{\frac{50}{64}-0.8}{0.05}\right)$$

$$= P\left(z < \frac{0.78125-0.8}{0.05}\right) = P(z < -0.375)$$

إذن الاحتمال المطلوب هو المساحة تحت المنحنى الطبيعى المعيارى لأقل من 0.375 - (لأكبر من 0.375) أى 0.3539.



مثال (٢)

وجد أن نسبة المدخنين بين الطلاب الجامعيين هى 20%. أختير 400 طالب عشوائيا من جامعة ما. أوجد احتمال:

(أ) أن تكون نسبة المدخنين فى العينة أقل من 17%.

(ب) أن تكون نسبة المدخنين فى العينة بين 17 %، 23 %.

(ج) أن تتجاوز نسبة المدخنين فى العينة بين 24% .

الحـــل

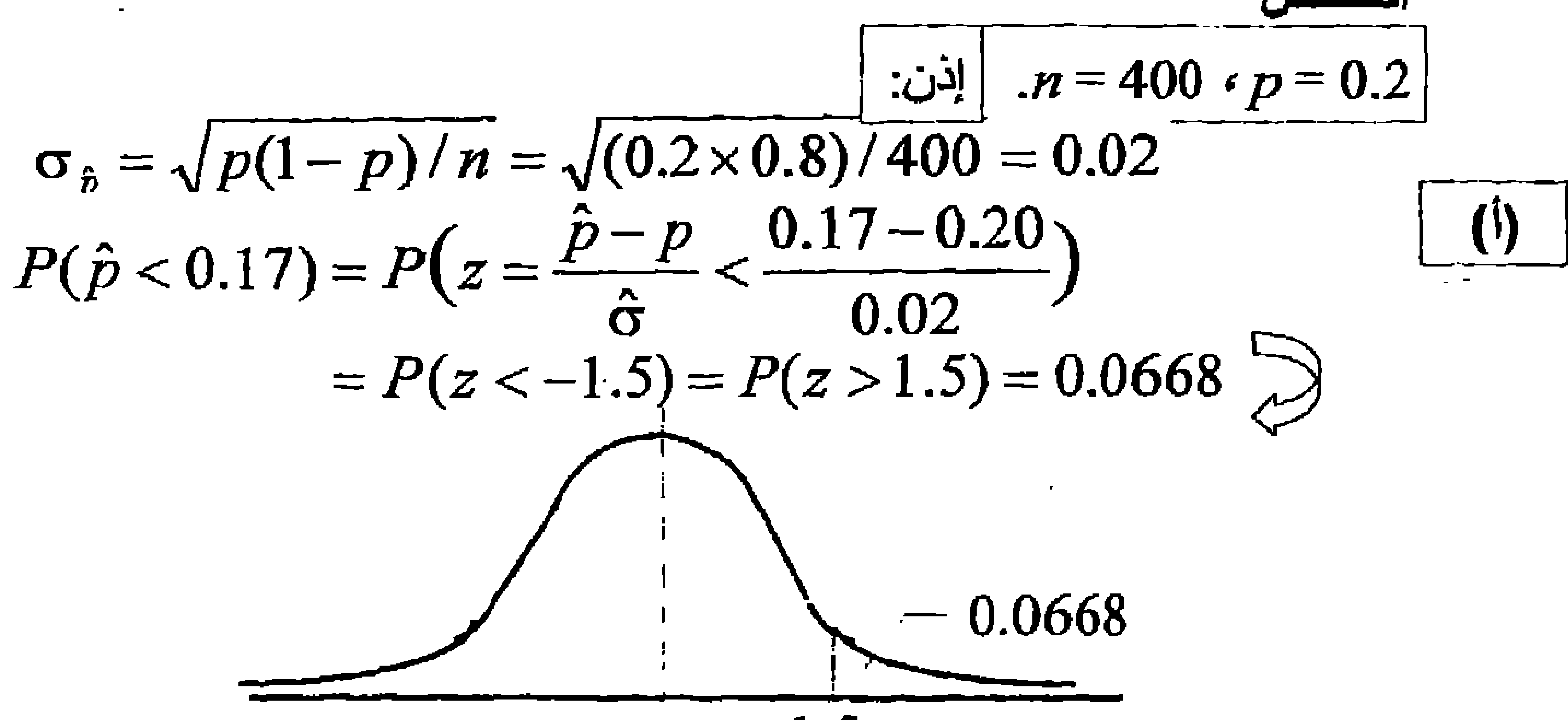
$p = 0.2$ ، $n = 400$. إذن:

$$\sigma_{\hat{p}} = \sqrt{p(1-p)/n} = \sqrt{(0.2\times 0.8)/400} = 0.02$$

(أ)

$$P(\hat{p} < 0.17) = P\left(z = \frac{\hat{p}-p}{\hat{\sigma}} < \frac{0.17-0.20}{0.02}\right)$$

$$= P(z < -1.5) = P(z > 1.5) = 0.0668$$



(ب)

$$P(0.17 \le \hat{p} \le 0.23) = P\left(\frac{0.17-0.20}{0.02} \le z \le \frac{0.23-0.20}{0.02}\right)$$

$$= P(-1.5 \le z \le 1.5) = 2P(0 \le z \le 1.5)$$

$$= 2\times 0.4332 = 0.8664$$

0.8664

−1.5   1.5

(ج)

$$P(\hat{p} > 0.24) = P\left(z > \frac{0.24-0.20}{0.02}\right) = P(z > 2) = 0.02275$$

0.02275

2

تمـــــرين (٢)

١. فيما يلى نعطى المتوسط μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائى X فى مجتمـــع حجمـــه N.
احسب القيمة المتوقعة $E(\bar{X})$ والتباين $V(\bar{X})$ لمتوسطات عينات عشوائية حجمها n من المجتمع.

(أ) $N = 12{,}200$ ، $\mu = 66.3$ ، $\sigma^2 = 8$ ؛ $n = 4, 8, 50, 100$

(ب) $N = 5{,}765$ ، $\mu = 154.2$ ، $\sigma^2 = 0.7921$ ؛ $n = 2, 10, 50, 100$

(ج) $N = 1{,}905$ ، $\mu = 14.29$ ، $\sigma^2 = 268.96$ ؛ $n = 2, 10, 50, 100$

(د) $N = 1{,}905$ ، $\mu = 2.97$ ، $\sigma^2 = 0.0225$ ؛ $n = 2, 10, 50, 100$

٢. فيما يلى نعطى المتوسط μ والتباين σ^2 للمتغير العشوائى X فى مجتمـــع حجمـــه N.
احسب احتمال أن يحقق المتوسط $\bar{x}$ لعينات عشوائية حجمها n المتباينات المذكورة:

(أ) $N = 12{,}200$, $\mu = 66.3$, $\sigma^2 = 8$, $P(66.41 \le \bar{x} \le 68.19)$; $n = 10, 40, 90$

(ب) $N = 12{,}200$, $\mu = 66.3$, $\sigma^2 = 8$, $P(66.85 \le \bar{x} \le 67.75)$; $n = 40$

(ج) $N = 12{,}200$, $\mu = 66.3$, $\sigma^2 = 8$, $P(67.00 \le \bar{x} \le 67.60)$; $n = 90$

(د) $N = 5{,}765$, $\mu = 154.2$, $\sigma^2 = 268.96$, $P(152.08 \le \bar{x} \le 157.37)$; $n = 15, 60, 135$

(هـ) $N = 5{,}765$, $\mu = 154.2$, $\sigma^2 = 268.96$, $P(153.14 \le \bar{x} \le 155.79)$; $n = 60$

(و) $N = 5{,}765$, $\mu = 154.2$, $\sigma^2 = 268.96$, $P(153.49 \le \bar{x} \le 155.26)$; $n = 135$

(ز) $N = 1{,}905$, $\mu = 2.97$, $\sigma^2 = 0.0225$, $P(\bar{x} \le 14.49)$; $n = 20, 40, 80$

(ح) $N = 1{,}905$, $\mu = 2.97$, $\sigma^2 = 0.0225$, $P(\bar{x} \le 2.99)$; $n = 15, 30, 60$

٣. أوزان عبوات من تركيبة غذائية تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 502 جرام بانحراف معيارى 3.75 جرام. اختيرت عينات عشوائية من 16عبوة. احسب المتوسط والتباين لمتوسطات العينات.

٤. أفاد عالم نفسانى فى تقرير كتبه أن الأطفال فى المرحلة العمرية من سنتين إلى خمس سنوات يشاهدون التليفزين بمعدل 25 ساعة أسبوعيا فى المتوسط. اختيرت عينة عشوائية من 20 طفلا فى تلك المرحلة العمرية. أوجد احتمال أن يكون متوسط عدد ساعات المشاهدة فى تلك العينة أكبر من 26.3 ساعة أسبوعيا بفرض أن المتغير العشوائى الذى يعبر عن عدد ساعات المشاهدة أسبوعيا يتبع توزيعا طبيعيا متوسطه 25 ساعة بانحراف معيارى 3 ساعات.

٥. وجد متوسط مدة بقاء السيارة عند المالك الأول لها فى مدينة ما هو 96 شهرا. بفرض أن الانحراف المعيارى هو 16 شهرا واختيرت عينة عشوائية من 36 سيارة أوجد احتمال أن يكون متوسط بقاء السيارة عند المالك الأول لها بين 90، 100شهرا.

الدرس الثالث

التقـــــــدير ESTIMATION

٣-١ مقدمة

واحدة من أهم طرق الإحصاء الاستدلالى هى أن نُقدِّر معلمات مجتمع ما عن طريق عينات نأخذها منه. وقد ابتكر الإحصائيون طريقتان للتقدير: الطريقة الأولى تسمى **التقدير عند نقطة** ***point estimation***، والطريقة الثانية هى **التقدير على فترة** ***interval estimation***.

التقديـــــر

التقدير عند نقطة

وهو يتضمن قيمة واحدة (نقطة) فقد يقدر صاحب مصنع للمصابيح تباين الإنتاج الجديد بـ 106 ساعة.

لذا فإن التقدير عند نقطة يناسب المجتمعات التى يُعَبَّر عنها متغير عشوائى متقطع. أما المجتمعات التى يُعَبَّر عنها متغير عشوائى متصل فيناسبها التقدير على فترة.

التقدير على فترة

نعلم أنه إذا كان لدينا متغيرا عشوائيا متصلا، فإن كثيرا من معلمات المجتمع الذى يعبر عنه هذا المتغير العشوائى مثل المتوسط والتباين هى أيضا متصلة لذا لا يصلح لها التقدير عند نقطة، فمثلا احتمال أن تكون قيمة تباين أعمار المصابيح 106 ساعة بالضبط يساوى صفرا! وبدلا من ذلك يستطيع صاحب المصنع أن يقدر أن قيمة التباين تقع فى الفترة [101.34,110.66].

٣-٢ الخصائص المطلوبة للتقدير عند نقطة

اتفق علماء الإحصاء أن المُقدِّر لمعلمة من معالم المجتمع يجب أن تكون له الصفات والخصائص الآتية:

١. يجب أن يكون المُقدِّر غير متحيز

يكون المقدر $\hat{\theta}$ لمعلمة θ غير متحيز إذا كان توقعه يساوى θ . أى إذاكان:

$$E(\hat{\theta}) = \theta$$

٢. يجب أن يكون المُقدِّر متوافقا

يكون المقدر $\hat{\theta}$ لمعلمة θ متوافقا إذا كان لأى عدد موجب ε فإن:

$$P(|\hat{\theta} - \theta|) < \varepsilon$$

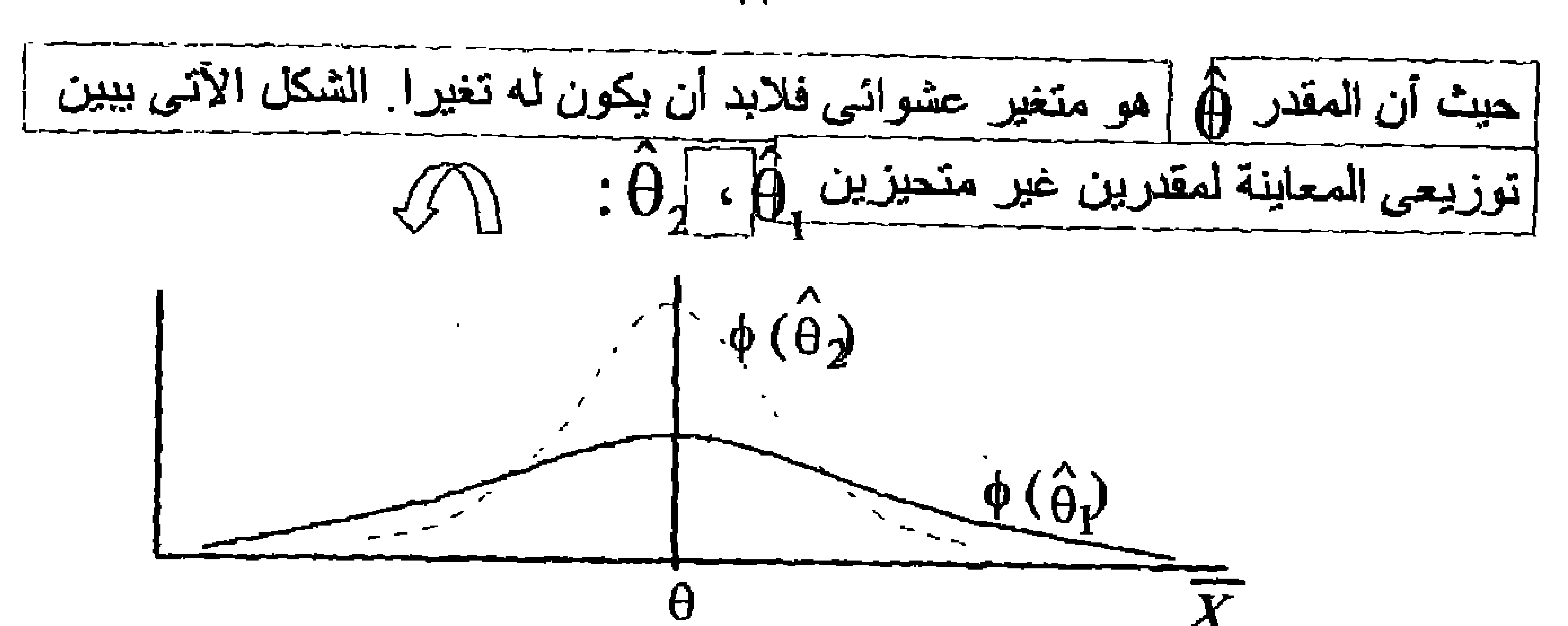
يؤول إلى 1 كلما ازداد حجم العينة. أى أن:

$$P(\theta - \varepsilon < \hat{\theta} < \theta + \varepsilon) \to 1$$ كلما ازداد حجم العينة

٣. يجب أن يكون المُقدِّر كفؤا

بوجه عام نستطيع أن نقول أن المقدر ذو أقل تباين هو الأكفأ. ونبرر ذلك كالآتى:

حيث أن المقدر $\hat{\theta}$ هو متغير عشوائى فلابد أن يكون له تغيرا. الشكل الآتى يبين توزيعى المعاينة لمقدرين غير متحيزين $\hat{\theta}_1$ ، $\hat{\theta}_2$:



واضح أن التوزيع $\phi(\hat{\theta}_2)$ يحصر المعلمة θ فى فترة أقل مما يفعل التوزيع $\phi(\hat{\theta}_1)$.

٣-٣ تقدير المتوسط Estimating the Mean

سنثبت الآن أن متوسط العينة $\overline{X}$ هو مقدر غير متحيز لمتوسط المجتمع μ.

لتكن العينة ذات حجم n . فإن توقع المتوسط $\overline{X}$ هو:

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = E\left(\frac{X_1}{n} + \frac{X_2}{n} + \cdots + \frac{X_n}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}E(X_1) + \frac{1}{n}E(X_2) + \cdots + \frac{1}{n}E(X_n) \quad \text{(من خصائص التوقع)}$$

$$= \frac{1}{n}\mu + \frac{1}{n}\mu + \cdots + \frac{1}{n}\mu = \mu$$

(حيث أن X_1 ، X_2 ، ... ، X_n هى عناصر من الجتمع وتوقع أى منها يساوى متوسط المجتمع μ).

ومن نظرية النهاية المركزية فإن $\sigma_{\overline{X}}^2 = \sigma^2 / n$ وعندما يزداد حجم العينة n فإن $\sigma_{\overline{X}}^2$ تؤول إلى الصفر. لذا فإن الفترة اللازمة لتحصر μ تضيق كلما ازداد حجم العينة.

وبالعكس إذا اخترنا نقطتين μ − ε ، μ + ε فإن المساحة بينهما تزداد بازدياد حجم العينة n. أى أن:

$$P(\mu - \varepsilon \le \overline{X} \le \mu + \varepsilon)$$

تزداد كلما ازدادت n. وذلك يعنى أن $\overline{X}$ هو مقدر متوافق.

٣-٤ تقدير التباين Estimating the Variance

لتكن لدينا عينة X_1، X_2، ...، X_n ذات حجم n من مجتمع ما. قد يتبادر للذهن أن:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$$

هو مقدر غير متحيز لتباين الجتمع σ^2، ولكن يمكن أن نثبت أن الصيغة:

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}$$

هى التى تعطى تقديرا غير متحيز لتباين الجتمع σ^2.

مثال

عينة مكونة من 20 فاتورة من عدد كبير منها. فإذا كانت قيم تللك الفواتير هى:

12.53	22.27	13.38	51.47	8.05
11.47	58.00	43.16	19.05	22.20
24.11	43.48	15.27	50.97	8.06
62.93	32.04	26.78	38.07	45.11

أوجد تقديرا نقطيا لكل من:

(أ) متوسط مجتمع الفواتير **(ب)** نسبة الفواتير التى تزيد عن L.E.50

(ج) تباين مجتمع الفواتير

الحل

من الجدول نستطيع أن نستنتج أن:

$$\sum_{i=1}^{20} x_i = 608.40 \quad , \quad \sum_{i=1}^{20} x_i^2 = 24082.8840$$

(أ) تقدير متوسط مجتمع الفواتير هو:

$$\hat{\mu} = \frac{608.40}{20} = \text{L.E. } 30.42$$

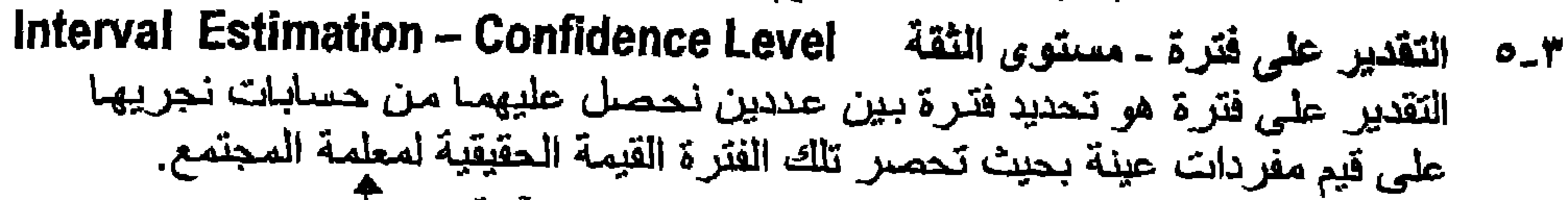
(ب) حيث أن عدد الفواتير التى تزيد عن L.E. 50 فى العينة هو 4 أى بنسبة 0.2، إذن:

$$\hat{p} = \frac{4}{20} = 0.2$$

(ج) تقدير تباين مجتمع الفواتير هو:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - n\bar{X}^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{24082.884 - 20(30.42)^2}{19}}$$

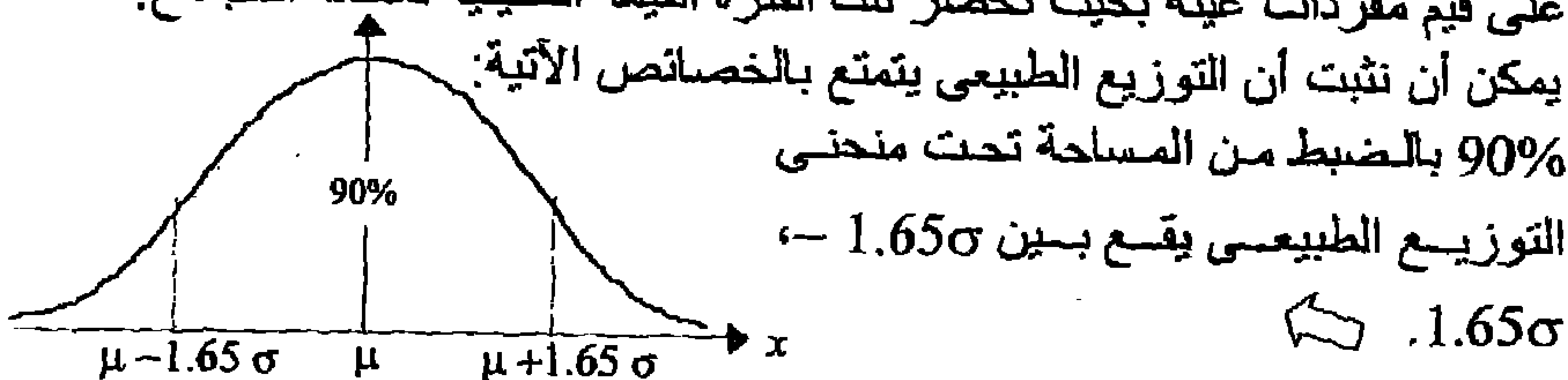
$$= \text{L.E. } 17.13$$



٥-٣ التقدير على فترة - مستوى الثقة Interval Estimation – Confidence Level

التقدير على فترة هو تحديد فترة بين عددين نحصل عليهما من حسابات نجريها على قيم مفردات عينة بحيث تحصر تلك الفترة القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع.

يمكن أن نثبت أن التوزيع الطبيعى يتمتع بالخصائص الآتية:



١. 90% بالضبط من المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى يقع بين -1.65σ، 1.65σ.

فى هذه الحالة نستطيع أن نقول أن **الخطأ المعيارى** فى حساب متوسط المجتمع $(\bar{X}-\mu)/\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ **عند مستوى ثقة 90%** يقع بين -1.65σ، 1.65σ.

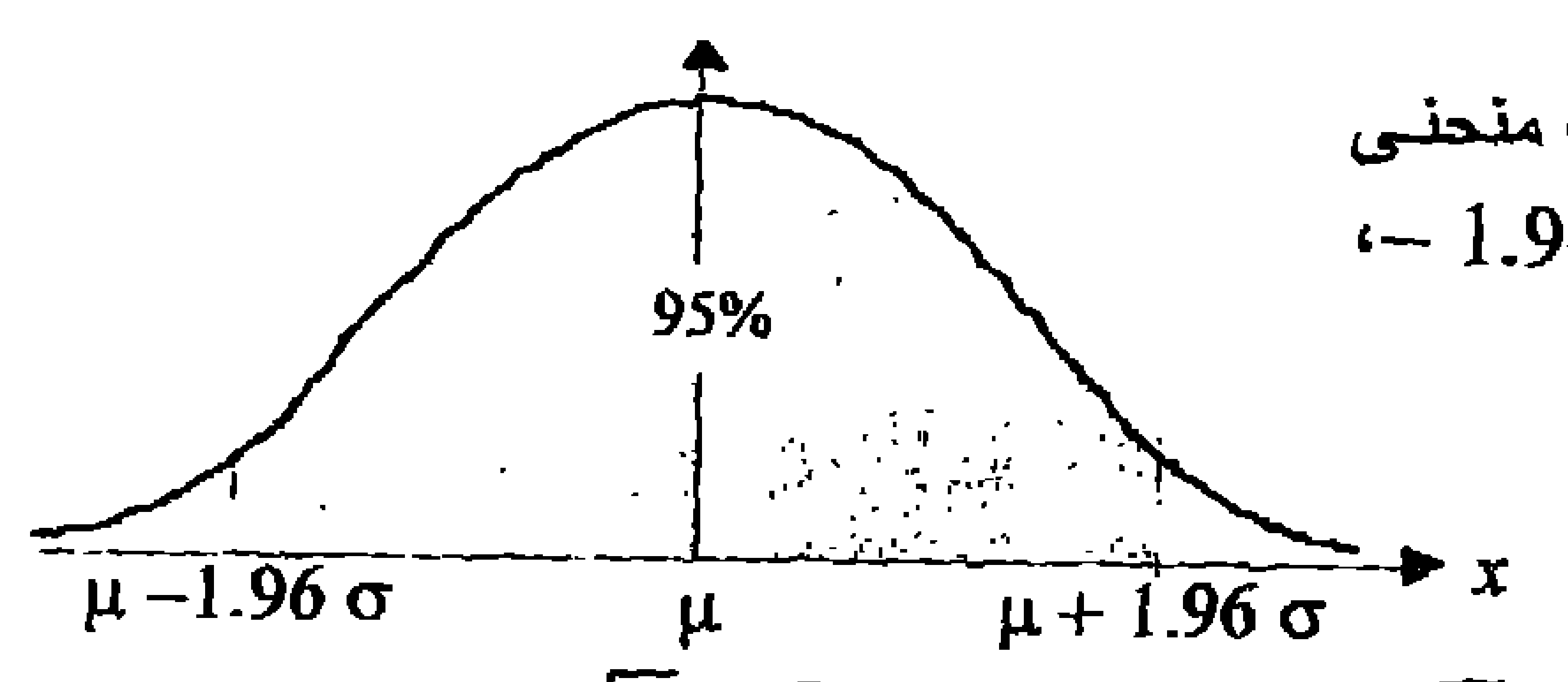
أى أن:

$$P\left(-1.65<\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}<1.65\right)=0.90$$

أى أن:

$$P\left(\frac{-1.65\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}-\mu<\frac{1.65\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.90$$

أى أنه عند مستوى ثقة 90% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقى للمجتمع لا يتجاوز $1.65\,\sigma/\sqrt{n}$.



٢. 95% بالضبط من المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى يقع بين -1.96σ، 1.96σ.

فى هذه الحالة نجد أن:

$$P(-1.96\sigma/\sqrt{n}<\bar{X}-\mu<1.96\sigma/\sqrt{n})=0.95$$

أى أنه عند مستوى ثقة 95% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقى للمجتمع لا يتجاوز $1.96\,\sigma/\sqrt{n}$.

٣. 99% بالضبط من المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعى يقع بين $-2.58\ \sigma$، 2.58σ.

99%

μ − 2.58 σ   μ   μ + 2.58 σ   x

فى هذه الحالة نجد أن:

$$P(-2.58\sigma/\sqrt{n}<\bar{X}-\mu<2.58\sigma/\sqrt{n})=0.99$$

أى أنه عند مستوى ثقة 99% فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقى للمجتمع لا يتجاوز $2.58\,\sigma/\sqrt{n}$.

مثال (١)

يريد محاسب أن يتحرى عن زمن تحصيل الديون المستحقة لشركته. وقد وجد بخبرته أن أزمان تحصيل الديون تتبع توزيعا طبيعيا تقريبا بانحراف معيارى 10 أيام، وإذا كانت أزمان تحصيل الديون أكبر من اللازم فإن الشركة تكون معرضة للإفلاس. ولذلك لا بد من معرفة متوسط أزمان تحصيل الفواتير بدقة. من أجل ذلك أخذ عينة من 25 فاتورة من العام الماضى فوجد أن متوسط أزمان تحصيلها هو 44 يوما. على مستوى ثقة 95% ما هى دقة تقدير متوسط كل الفواتير بمتوسط العينة؟

الحـــــل

$$P\left(\frac{-1.96\,\sigma}{\sqrt{n}} < \bar{x}-\mu < \frac{1.96\,\sigma}{\sqrt{n}}\right) = 0.95$$

$$\therefore \quad P\left(-\frac{1.96\times 10}{\sqrt{25}} < \bar{x}-\mu < \frac{1.96\times 10}{\sqrt{25}}\right) = 0.95$$

$$\therefore \quad P\left(-3.92 < \bar{x}-\mu < 3.92\right) = 0.95$$

$$\therefore \quad P\left(\bar{x}-3.92 < \mu < \bar{x}+3.92\right) = 0.95$$

$$\therefore \quad P\left(44-3.92 < \mu < 44+3.92\right) = 0.95$$

$$\therefore \quad P\left(40.08 < \mu < 46.92\right) = 0.95$$

وهذا يعنى أن المحاسب يكون واثقا بنسبة 95% أن المتوسط الحقيقى لأزمان تحصيل الفواتير يتراوح بين 40.08 يوما ، 46.92 يوما.

مثال (٢)

يريد مدير شركة إنتاج أدوات كهربية أن يقدر كم يوما تأخذه طلبية من الأجهزة حتى تصل للعميل. ومن أجل ذلك اختار عينة من 60 طلبية سابقة فوجد أن متوسط العينة هو 5.9 يوما وتقدير الانحراف المعيارى فى العينة هو 1.7 يوما. احسب فترة الثقة عند مستوى 95% .

الحـــــل

فترة الثقة للمتوسط μ عند مستوى 95% هى:

$$\left(\bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

ولكن الانحراف المعيارى σ للمجتمع غير معلوم. غير أنه لحسن الحظ فإن كبر حجم العينة يبرر أخذ التقدير غير المتحيز $\hat{\sigma}$ للانحراف المعيارى للمجتمع من العينة.

إذن فترة الثقة هى:

$$\left(\bar{X}-1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{X}-1.96\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right)$$

إذن فترة الثقة هى:

$$\left(5.9-1.96\times\frac{1.7}{\sqrt{60}}, 5.9-1.96\times\frac{1.7}{\sqrt{60}}\right)$$

أى أنه عند مستوى ثقة 95% فإن الطلبية تأخذ من 5.47 إلى 6.33 يوما حتى تصل إلى العميل.

مثال (٣)

من خلال مراجعة محاسبية أخذت 50 فاتورة من عدد كبير من الفواتير ووجد أن المتوسط هو L.E. 52.40 وأن الانحراف المعيارى هو L.E. 5.60 . أوجد الخطأ المعيارى فى حساب المتوسط واحسب فترة الثقة لتقدير المتوسط عند مستوى 90%.

الحـــل

حيث أن الانحراف المعيارى للمجتمع غير معلوم فإننا نأخذ تقديره من العينة. إذن:

$$\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{5.60}{7} = 0.80$$

فترة الثقة للمتوسط μ عند مستوى 90% هى:

$$\left(\bar{X} - 1.65 \times 0.80 , \bar{X} - 1.65 \times 0.80\right)$$

اى:

$$(52.40 - 1.65 \times 0.80 , 52.40 - 1.65 \times 0.80)$$

اى:

L.E. (51.08 , 53.72)

مثال (٤)

من خلال تحليل شركة لعينة عشوائية من معاملات العملاء خلال شهر وجدت الآتى:

حجم التعامل بالألف جنيه	أقل من 1	1 –	5 –	10 –	15 –	20 –	30 –
عدد العملاء	8	19	38	40	22	13	4

قدر متوسط التعامل والانحراف المعيارى لتعاملات الشركة ككل واحسب فترة الثقة لتقدير المتوسط عند مستوى 95%.

الحـــل

نكون الجدول الآتى: ⇦

الفئة	x_i	f_i	$f_i x_i$	$x_i^2 f_i$
أقل من 1	0.5	8	4	2.0
1 –	3.0	19	57	171.0
5 –	6.5	38	285	2136.5
– 10	12.5	40	500	6250.0
– 15	16.5	22	385	6736.5
– 20	25.0	13	325	8125.0
– 30	40.0	4	160	6400.0
المجموع		144	1716	29823.0

$$\bar{x} = \frac{1716}{144} = \text{L.E.}\, 11.92 ,$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{29823}{144} - (11.92)^2}$$

$$= \sqrt{207.1 - 142.09} = 8.06$$

فترة الثقة للمتوسط μ عند مستوى 95% هى:

$$\left(11.92 - 1.96 \times \frac{8.07}{12} , 11.92 + 1.96 \times \frac{8.07}{12}\right) = (10.60, 13.24)$$

٣-٦ حجم العينة Sample Size

هناك سؤال يطرح نفسه هو: ماهو أقل حجم يلزم لكى يكون التقدير دقيقا؟ إجابة هذا السؤال ليست سهلة حيث أن الدقة فى التقدير تعتمد على ثلاثة عوامل هى:
(أ) أكبر خطأ للتقدير (ب) الانحراف المعيارى للمجتمع (ج) مستوى الثقة

علـى فرض أن الانحراف المعيارى للمجتمع معروف أو تم تقديره فى دراسة سابقة فإن العلاقة بين حجم العينة المطلوب وأكبر خطأ للتقدير هى:

$$E = z_{\alpha/2}\left(\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

حيث $z_{\alpha/2}$ تحدد من الجدول الآتى:

مستوى الثقة	90%	95%	99%
$Z_{\alpha/2}$	1.65	1.96	2.58

$$\therefore \quad n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2$$

مثال

تريد كلية من الكليات الجامعية أن تقدر متوسط أعمار الطلاب. من أجل ذلك كلفت مدرس من مدرسى الاحصاء أن يجرى هذه الدراسة. فإذا أراد المدرس أن يكون على ثقة 99% من أن تقديره يكون دقيقا إلى عام واحد فكم يكون حجم العينة إذا علم أنه فى دراسة سابقة وجد أن الانحراف المعيارى لطلاب الكلية هو 3 سنوات؟

الحل

$$n = \left(\frac{z_{\alpha/2}\cdot\sigma}{E}\right)^2 = \left(\frac{2.58\times 3}{1}\right)^2 = 59.9$$

أى أن حجم العينة اللازم لدرجة الدقة المطلوبة هو 60 طالبا.

٣-٧ تقدير النسب على فترة Interval Estimation of Proportion

كما هو الحال مع متوسط المجتمع فإننا كثيرا ما نحتاج إلى تقدير النسبة p لمعلمة من معالم المجتمع باستخدام النسبة $\hat{p}$ المستخرجة من العينة.

وباستخدام النتيجة التى وصلنا إليها أن نسبة العينة $\hat{p}$ تتبع توزيعا طبيعيا متوسطه p وانحرافه المعيارى $\sqrt{p(1-p)/n}$ بشرط أن يكون حجم العينة كبيرا وأن تكون p ليست قريبة من 0 أو 1 فإننا نتوقع أن تكون فترة الثقة عند مستوى % 95 هى:

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

ولكن هذه الفترة تعتمد على النسبة p فى المجتمع وهى غير معلومة. ومع ذلك إذا استبدلنا p بـ $\hat{p}$ فإن فترة الثقة تقرّب إلى:

$$\left[\hat{p}-1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\ ,\ \hat{p}+1.96\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$$

مثال

من مجموعة كبيرة من الحسابات اختيرت عينة عشوائية من 200 منها حيث وجد أن 18 حسابا من تلك العينة غير منتظمة. أوجد فترة الثقة عند مستوى 95% لنسبة عدم الانتظام فى مجموعة الحسابات.

الحل

نسبة عدم الانتظام فى العينة هى:

$$\hat{p}=\frac{18}{200}=0.09$$

إذن تقديرنا للخطأ المعيارى للنسبة هو:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}=\sqrt{\frac{0.09\times 0.91}{200}}=0.0202$$

إذن فترة الثقة عند مستوى 95% لنسبة عدم الانتظام فى مجموعة الحسابات هى:

$$[0.09-(1.96\times 0.0202), 0.09+(1.96\times 0.0202)]$$

أى:

$$[0.05, 0.130]$$

٨-٣ التقدير للعينات صغيرة الحجم Small Sample Estimation

حتى الآن فرضنا أنه فى حالة عينة حجمها n فإن الخطأ المطلق بين متوسط العينة والمتوسط الحقيقى للمجتمع $\frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ يتبع توزيعا طبيعيا حتى نحصل على فترة الثقة لتقدير متوسط المجتمع μ. وكما رأينا فإن الانحراف المعيارى σ للمجتمع لايكون معلوما ونحتاج إلى استبداله بالتقدير غير المتحيز $\hat{\sigma}$ بشرط أن يكون حجم العينة n كبيرا كبرا كافيا. ولكن ماذا يحدث عندما يكون حجم العينة n صغيرا؟

لقد ابتكر لنا الإحصائى W. S. Gosset توزيعا إحصائيا يكون ملائما لهذه الحالة ويعرف بتوزيع t الذى يشبه فى شكله التوزيع الطبيعي ويؤول إليه عندما تكبر n.

التوزيع الطبيعى

توزيع t

x

ولتوزيع t جداول عند درجات الحرية المختلفة $\nu = n-1$.

مثال

يراد تقييم 900 من مبيعات شركة. ولعدم توفر الوقت الكافى أخذت عينة عشوائية تحتوى 18 منها حيث وجدت القيم الآتية (بالجنيه) للمبيعات:

45	58	49	70	38	80
38	15	50	40	45	75
35	43	100	44	41	34

أوجد الآتى:

(أ) تقدير المتوسط والانحراف المعيارى للمجتمع.

(ب) تقدبر نقطى للمبيعات كلها.

(ج) فترة الثقة عند مستوى 95% لتقدير إجمالى المبيعات.

الحل

(أ)

$$\hat{\mu} = \bar{x} = \frac{\sum x}{n} = \frac{900}{18} = \text{L.E.}50$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2\right)} = \sqrt{\frac{1}{17}(51800-45000)} = \text{L.E.}2$$

(ب)

$$900 \times 50 = \text{L.E.}45{,}000$$

(ج) حيث أن العينة صغيرة ($n = 18$) فإن التوزيع المناسب هو توزيع t بدرجة حرية $18 - 1 = 17$.

نبحث فى جدول توزيع t تحت القيمة 5% عند درجة حرية 17 فنجد القيمة 2.11.

ν	Two-tailed tests					ν
	10%	5%	2%	1%	0.1%	
15	1.75	2.13	2.60	2.95	4.07	15
16	1.75	2.12	2.58	2.92	4.01	16
17	1.74	2.11	2.57	2.90	3.96	17
18	1.73	2.10	2.55	2.88	3.92	18
19	1.73	2.09	2.54	2.86	3.88	19
20	1.72	2.09	2.53	2.85	3.85	20

إذن فترة الثقة لتقدير المتوسط هى:

$$\left[\bar{x} - t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right] = \left[50 - \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}}, 50 + \frac{2.11 \times 20}{\sqrt{18}}\right] = [40.05, 59.95]$$

إذن فترة الثقة لتقدير إجمالى المبيعات هى:

$$[40.05 \times 900, 59.95 \times 900] = \text{L.E.}[36{,}045 \ , \ 53{,}955]$$

٩-٣ تقدير التباين على فترة Interval Estimation of the Variance

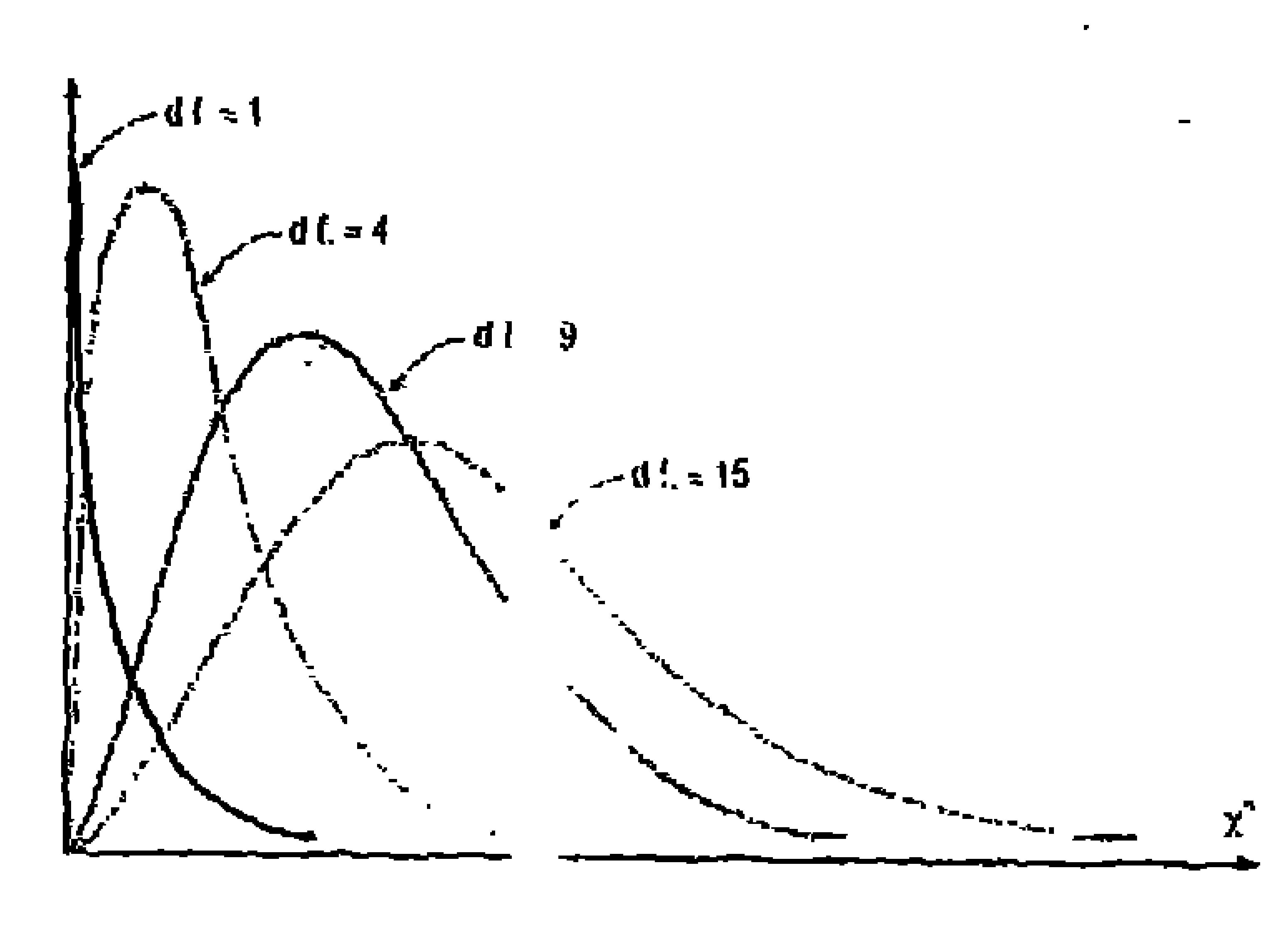
فى الإنتاج فإن التباين والانحراف المعيارى يشكلان أهمية كبرى؛ فمثلا عند تصنيع المواسير والمسامير المقلوظة والصواميل فلا بد أن يكون تباين الأقطار أقل ما يمكن حتى يكون التركيب سليما وإلا فإن مآلها إلى التكهين. وعند تصنيع الأدوية فإن التباين والانحراف المعيارى يلعبان دورا مهما حتى نضمن أن المرضى المتعاطين لتلك الأدوية يأخذون الجرعات المناسبة.

لذا فإن حساب فترات الثقة للتباين والانحراف المعيارى من الضرورة بمكان. ولحساب فترات الثقة هذه، فإننا نستخدم توزيعا احتماليا يسمى "كاى تربيع" χ^2.

وهذا التوزيع يعتمد على درجة الحرية $\nu = n-1$. حيث n حجم العينة.

ويبين الشكل المقابل توزيع χ^2 لبعض درجات الحرية. ⇦

هذا، وتوجد جداول لتوزيع χ^2 لدرجات حرية مختلفة.



ويلاحظ أن توزيع χ^2 لا يأخذ قيما سالبة وأنه ملتو جهة اليمين. وعندما ما تصل درجة الحرية إلى ما يقرب من 100فإن التوزيع يكون متماثلا تقريبا. وبالبع فإن المساحة تحت المنحنى تساوى 1.00.

وتستخدم قيم توزيع χ^2 فى مقام الصيغة الرياضية لفترات ثقة التباين حيث توجد قيمتان إحداهما تقع جهة اليميم من الجدول والأخرى جهة اليسار منه.

فمثلا لإيجاد قيمتى الجدول المناظرتين لمستوى ثقة 95% نحولها إلى القيمة العشرية 0.95 ونطرحها من 1 فنحصل على 0.05 ثم نقسم على 2 فتصبح القيمة 0.025 ومن الجدول نحصل على χ^2_{right}. وللحصول على χ^2_{left} نطرح 0.025 من 1 فنحصل على 0.975 ومن الجدول نحصل على χ^2_{right}.

وبفس الطريقة يمكن أن نحصل على χ^2_{right} ، χ^2_{left} المناظرتين لمستويات الثقة الأخرى مثل 90% ، 99%.

مثال

أوجد χ^2_{right} ، χ^2_{left} المناظرتين لمستوى الثقة 90%عندما يكون حجم العينة 25.

الحل

$$1 - 0.90 = 0.10 \, , \, 0.10/2 = 0.05 \, , \, 1 - 0.05 = 0.95 \, , \, \nu = 24$$

نبحث فى الجدول عن χ^2_{right} ، χ^2_{left} كالآتى:

n	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	n
						P%						
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{right} = 36.415 \quad , \quad \chi^2_{left} = 13.848$$

لإيجاد فترة الثقة للتباين نستخدم الصيغة:

$$\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{right}} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{left}}$$

ولإيجاد فترة الثقة للانحراف المعيارى نستخدم الصيغة:

$$\sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{right}}} < \sigma < \sqrt{\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{left}}}$$

مثال (١)

أوجد فترة ثقة بمستوى 95% للتباين والانحراف المعيارى لمحتوى النيكوتين للسجائر المصنعة فى مصنع للسجائر إذا أخذنا عينة عشوائية حجمها 20 سيجارة حيث وجد الانحراف المعيارى لها 1.6 ملليجرام.

الحـــــل

حيث أن مستوى الثقة هو 95% ، إذن $\alpha = 0.05$. لإيجاد القيمتين الحرجتين نحسب χ^2_{right} ، χ^2_{left} من الجدول كالآتى:

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
						P%						
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{right} = 32.852 \quad , \quad \chi^2_{left} = 8.907$$

إذن فترتا الثقة للتباين والانحراف المعيارى هما:

$$\sqrt{\frac{(20-1)(1.6)^2}{32.852}} < \sigma < \sqrt{\frac{(20-1)(1.6)^2}{8.907}} \quad ، \quad \frac{(20-1)(1.6)^2}{32.852} < \sigma^2 < \frac{(20-1)(1.6)^2}{8.907}$$

أى:

$$1.2 < \sigma < 2.3 \quad ، \quad 1.5 < \sigma^2 < 5.5$$

مثال (٢)

البيانات الآتية تمثل قيم الإيجار اليومى بالدولار لعدد 9 شاليهات اختيرت عشوائيا بمنتجعات بمنطقة العين السخنة:

59 54 53 52 39 49 47 49 48

أوجد فترة الثقة للانحراف المعيارى بمستوى 90%.

الحــــل

تقدير تباين المجتمع من البيانات المعطاه يحسب كالآتى:

$$\overline{X} = \frac{59+54+53+52+39+49+47+49+48}{9} = \frac{450}{9} = 50$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{9^2+4^2+3^2+2^2+11^2+1^2+3^2+1^2+2^2}{8} = \frac{81+16+9+4+121+1+9+1+4}{8}$$
$$= 30.75$$

وحيث أن مستوى الثقة هو 90% ، إذن $\alpha = 0.10$. لإيجاد القيمتين الحرجتين نحسب χ^2_{right} ، χ^2_{left} من الجدول كالآتى:

P %

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
7	0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11

من الجدول نجد أن:

$$\chi^2_{right} = 16.919 \quad , \quad \chi^2_{left} = 3.325$$

إذن فترة الثقة للانحراف المعيارى هى:

$$\sqrt{\frac{(9-1)(30.75)}{16.919}} < \sigma < \sqrt{\frac{(9-1)(30.75)}{3.325}}$$

أى:

$$\sqrt{14.54} < \sigma < \sqrt{73.99}$$

أى:

$$3.81 < \sigma < 8.60$$

تمـــــرين ٣ أ

١. ما الفرق بين التقدير لمعلمة من معالم مجتمع ما عند نقطة والتقدير على فترة. مـــن منهما الأفضل؟ لماذا؟

٢. ما هى المعلومات الضرورية لحساب التقدير على فترة؟

٣. ما هو الخطأ الأعظم للتقدير؟

٤. ماذا يقصد بالتعبير "مستوى ثقة 95% لتقدير المتوسط على فترة ".

٥. ما هى الصفات الثلاث التى يجب أن تتوفر للمقدر الجيد للمتوسط؟

٦. ما هى إحصاءة لتقدير المتوسط μ لمجتمع؟

٧. ما هى المطالب لتحديد حجم العينة؟ هل يكون حجم المجتمـــع مهمـــا فى هـــذا التحديد؟

٨. أوجد $z_{\alpha/2}$ لكل من الحالات الآتية:

(أ) فترة ثقة على مستوى 99% (ب) فترة ثقة على مستوى 95%

(ج) فترة ثقة على مستوى 98% (د) فترة ثقة على مستوى 95%

(هـــ) فترة ثقة على مستوى 90% (و) فترة ثقة على مستوى 94%

٩. تباع تركيبة غذائية فى عبوات أوزانها تتبع التوزيع الطبيعى بمتوســـط 502 جـــرام وانحراف معيارى 3.75 جرام. اختيرت عينة عشوائية من 16 عبوة. قَدِّر احتمـــال أن يكون متوسط أوزان عبوات العينة أقل من 500 جرام.

١٠. أخذت عينة عشوائية من 400 محاسب مؤهل ووجد أن متوسط مرتباتهم السنوى 12000 جنيه وانحراف معيارى 3000 جنيه. احسب الخطأ المعيـــارى للمتوســـط وقدر فترة ثقة عند مستوى 99% لمتوسط المرتبات.

١١. أخذت عينة عشوائية حجمها 35 من درجات القراءة لتلاميذ الـــصف الخـــامس

الابتدائى فوجد أن المتوسط يساوى 82 بانحراف معيارى 15 درجة. أوجد فترة الثقة لدرجات القراءة للتلاميذ عند مستوى ثقة:

(أ) 95%　　(ب) 99%

١٢. ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعى. أخذت عينة عشوائية حجمها n فوجد أن المتوسط يساوى 30 والتباين 100. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى 95% لكل من أحجام العينة الآتية:

(أ) 1　　(ب) 4　　(ج) 16

١٣. ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعى. أخذت عينة عشوائية حجمها n فوجد أن المتوسط يساوى 100 والتباين 225.75. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى 95% لكل من أحجام العينة الآتية:

(أ) 30　　(ب) 50　　(ج) 100

١٤. ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعى. أخذت عينة عشوائية حجمها 50 فوجد أن المتوسط يساوى 30 والتباين 98. احسب فترة الثقة للمتوسط بمستوى:

(أ) 90 %　　(ب) 97.5%　　(ج) 99.5%

١٥. ليكن X متغيرا عشوائيا يتبع التوزيع الطبيعى. أخذت عينة عشوائية حجمها 9 فوجد أن المتوسط يساوى 25 . فإذا علم أن تباين المجتمع يساوى 24، فاحسب فترة الثقة لتقدير μ بمستوى:

(أ) 75 %　　(ب) 86.6%　　(ج) 98%

١٦. عينة حجمها 16 من مجتمع أسفرت عن $\bar{x} = 14.5$، قدر فترة الثقة للمتوسط μ بمستوى 95%.

١٧. اختيرت عينة حجمها 100 من فواتير مبيعات فجاء تصنيفها كالآتى:

قيمة الفاتورة	0 – 20	20 – 40	40 – 60	60 – 80	80 – 100	100 – 125	125 – 150	150 – 200
عدد الفواتير	8	17	25	20	15	8	5	2

قدر فترة الثقة لمتوسط الفواتير الكلية μ بمستوى 95% ومستوى 99%.

تمـــــــرين ٣ب

١. ما هى خصائص توزيع t؟ ما المقصود بدرجة الحرية؟ متى يجب أن يستخدم توزيع t لإيجاد فترة الثقة للمتوسط؟

٢. أوجد كلا مما يأتى:

(أ) $t_{\alpha/2}$ عند $n = 18$ ومستوى ثقة 99% للمتوسط.

(ب) $t_{\alpha/2}$ عند $n = 23$ ومستوى ثقة 95% للمتوسط.

(ج) $t_{\alpha/2}$ عند $n = 15$ ومستوى ثقة 98% للمتوسط.

(د) $t_{\alpha/2}$ عند $n = 10$ ومستوى ثقة 90% للمتوسط.

(هـ) $t_{\alpha/2}$ عند $n = 20$ ومستوى ثقة 95% للمتوسط.

٣. متوسط الهيموجلوبين لعينة عشوائية حجمها 20 من المدرسين هى 20 جرام/100 ملليلتر والانحراف المعيارى 2 جرام/100 ملليلتر. قدر فترة الثقة للمتوسط الحقيقى بمستوى 99%.

٤. أخذت 17 ولاية أمريكية كعينة فوجد أن الضرائب على السجائر بالسنت هى:

64	124	99	35	71	55	98	120	112
	93	70	20	132	100	55	150	150

قدر فترة الثقة لمتوسط تلك الضريبة فى الولايات المتحدة الأمريكية بمستوى 98%.

تمـــــرين ٣ج

١. فى كل من الحالات الآتية أوجد $\hat{p}$ ، $\hat{q}$:

(أ) $X=40$ ، $n=80$ (ب) $X=90$ ، $n=200$

(ج) $X=60$ ، $n=130$ (د) $X=35$ ، $n=60$

(هـ) $X=43$ ، $n=95$

٢. أوجد $\hat{p}$ ، $\hat{q}$ لكل من النسب الآتية:

(أ) 12% (ب) 29% (ج) 65% (د) 53% (هـ) 67%

٣. فى مراجعة نهائية لعدد 12,143 فاتورة مبيعات لشركة تجارية خلال عام اختيرت 200 فاتورة عشوائيا وروجعت مراجعة دقيقة وصنفت وأسفر ذلك عن البيانات الآتية:

عدد البنود	عدد الفواتير	عدد الأخطاء بالفاتورة		
		0	1	2
1 – 5	64	60	2	2
6 –10	90	74	8	8
10 –	46	32	8	6
المجموع	200			

المطلوب تقدير فترة ثقة نسبة الفواتير الكلية التى تحتوى على خطأ واحدا على الأقل بمستوى 95%.

٤. أظهرت دراسة حديثة على 100 فى مدينة ما أن 27 منهم يتصفون بالبدانة. قدر بمستوى ثقة 90% لنسبة البدانة فى مجتمع المدينة.

٥. وجد أن نسبة الذين يتلقون تعليمهم فى مدارس خاصة هى 11%. أخذت عينة عشوائية من 450 طالبا وطالبة فى مساحة جغرافية معقولة فوجد أن منهم 55

يدرسون فى مدارس خاصة. قدر بمستوى ثقة 95% النسبة الحقيقية للذين يتلقـون تعليمهم فى مدارس خاصة.

٦. فى دراسة على عينة من 200 من العاملين فى شركة ما قرر 168 منهم أنهم يقاطعون مرتين أو ثلاثا فى الساعة أثناء عملهم برسائل المحمول أو الفاكسات...إلخ. أوجـد بمستوى ثقة 90% فترة نسبة العاملين الذين يقاطعون مرتين أو ثلاثا فى الساعة أثناء عملهم.

٧. فى دراسة على عينة من 80 من حوادث الطرق المميتة وجد أن 46 منها ناتج عـن تعاطى المخدرات. قدر بمستوى 95% فترة نسبة الحوادث المميتة لهذا السبب.

٨. فى استطلاع رأى لـ 1005 من الأفراد قرر 452 منهم أنهم أسوأ حالا ماديا مـن العام الماضى. قدر بمستوى 95% فترة نسبة الأفراد الأسوأ حالا ماديا هذا العام.

٩. يريد باحث فى العقاقير أن يقدر نسبة الإناث الذين يتناولون الفيتامينات. ويريد هذا الباحث أن يكون على ثقة بمستوى 99% أن يكون تقديرة صحيحا فى حدود 2% من النسبة الصحيحة. وقد أظهرت دراسة حديثة أنه بين 180 من الإناث فـإن 25 منهم يتناولون الفيتامينات.

(أ) كم يجب أن يكون حجم العينة؟

(ب) إذا لم يتوافر تقدير للنسبة من العينة كم يكون حجم العينة عندئذ؟

١٠. أظهرت دراسة أن 29 من كل 100 سيدة فوق الـ55 عاما أرامل.

(أ) كم يجب أن يكون حجم العينة حتى نكون على ثقـة بنـسبة 90% أن تقديرنا لنسبة الأرامل فى حدود 0.05 من النسبة الصحيحة؟

(ب) إذا لم يتوافر تقدير للنسبة من العينة كم يكون حجم العينة عندئذ؟

تمـــــرين ٣د

١. ما هو التوزيع الإحصائى الذى يجب استخدامه لحساب فترات الثقة للتباين والانحراف المعيارى؟ وما هى الفروض الواجب افتراضها عند حساب تلك الفترات؟

٢. باستخدام جدول توزيع χ^2 أوجد χ^2_{left} ، χ^2_{righ} لكل من الحالات الآتية:

(أ) $\alpha = 0.05, n = 16$ (ب) $\alpha = 0.10, n = 5$

(ج) $\alpha = 0.01, n = 23$ (د) $\alpha = 0.05, n = 29$

(هـ) $\alpha = 0.10, n = 14$

٣. قدر بمستوى ثقة 95% فترتى التباين والانحراف المعيارى لأعمار البطار يات بالشهر لعينة عشوائية من 20 بطارية إذا علمت أن الانحراف المعيارى هو 1.7 شهرا. [افترض أن الأعمار تتبع توزيعا طبيعيا].

٤. قدر بمستوى ثقة 90% فترتى التباين والانحراف المعيارى للزمن الذى يأخذه منفذ أمنى فى تفتيش الحافلات إذا علمت أن فى عينة من 27 حافلة كان الانحراف المعيارى هو 6.5 دقيقة. [افترض أن الأزمان تتبع توزيعا طبيعيا].

٥. قدر بمستوى ثقة 99% فترتي التباين والانحراف المعيارى لأحجام شحنة من عبوات الزيوت سعة 2 لتر إذا أخذنا عينة من 14 عبوة ووجد أن الانحراف المعيارى هو 0.12 لتر. [افترض أن الأحجام تتبع توزيعا طبيعيا].

٦. أعلنت محطة خدمة سيارات أن العميل لن يأخذ أكثر من 30 دقيقة لتغيير زيت السيارة. أخذت عينة عشوائية من 28 حالة تغيير الزيوت فوجد أن الانحراف المعيارى هو 5.2 دقيقة. قدر بمستوى ثقة 95% فترة الانحراف المعيارى.

الباب الرابع
اختبارات الفروض لمتغير واحد
TESTING OF HYPOTHESES OF ONE VARIABLE

٤-١ مقدمة

لطالما اهتم الباحثون بالإجابة على أنواع من الأسئلة منها:

- قد يتساءل علماء الفيزياء عما إذا كانت ظاهرة الاحتباس الحرارى تدل على أن الأرض تتجه نحو الدفئ.
- قد تريد شركة أدوية معرفة إذا كان استخدام عقار معين يخفض من ضغط الدم عند المريض.
- قد يريد باحث تربوى التثبت من أن استخدام تقنية حديثة فى التدريس أفضل من استخدام التقنيات الكلاسيكية.
- قد يريد بيت من بيوت الأزياء أن يعرف هل استخدام ألوان معينة يجعل الأزياء أكثر قبولا لدى المشترى؟
- قد تريد شركة تصنيع سيارات التأكد من أن استخدام الحزام فى السيارة أكثر أمانا للراكب.
- قد يريد مصنع لإنتاج الصواميل أن يتأكد من أن الانحراف المعيارى لأقطار تلك الصواميل لا يتجاوز ٠,١ من المليمتر.
- قد يريد عالم نفسى التأكد من أن مستوى الذكاء عند البنين لا يختلف عن مستوى الذكاء عند البنات فى نفس المرحلة العمرية.

مثل تلك التساؤلات يجيب عليها الإحصائيون مستخدمين ما يسمى "اختبار الفروض" وهى سبيل من سبل اتخاذ القرار. وبالطبع فإن الأسئلة المراد الإجابة عليها تخص مجتمعا ما ولكن الباحث الإحصائى لا يستطيع إجراء الاختبار على المجتمع بأكمله ولابد له من عينة ممثلة للمجتمع لإجراء الاختبار الإحصائى عليها.

وسيكون علينا فى هذا العرض أن نعرف الخطوات التى نتبعها حتى نتوصل إجابة مثل تلك الأسئلة.

٤-٢ خطوات اختبار الفروض

١. تعريف المجتمع قيد الدراسة وتحديد الفروض.
٢. تحديد مستوى المعنوية ويقصد به درجة الدقة التى تكون بها إجابة السؤال صحيحة.
٣. اختيار عينة ممثلة للمجتمع لإجراء الدراسة عليها.
٤. جمع البيانات اللازمة للدراسة.
٥. إجراء حسابات الاختبار الإحصائى.
٦. التوصل إلى نتيجة (أى إجابة السؤال المطروح) فى حدود مستوى المعنوية المفترض.

وقد سبق لنا دراسة الخطوتين ٣ ، ٤. لذا فإننا سنقتصر على إجراء الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى. تحديد الفروض التى سنتحقق من إحداها

الخطوة الثانية تحديد مستوى المعنوية

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى

الخطوة الرابعة. التوصل لاختيار فرض من الفروض

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح.

٤ـ ٣ تحديد فروض الاختبار الإحصائى

هناك نوعان من الفروض لكل حالة من حالات اختبار الفروض:

فرض العدم:

وهو الفرض بأن معلما من معالم مجتمع ما (متوسط، تباين، ... إلخ) يظل ثابتا عند قيمة معينة أو أن معلما ما يأخذ قيما متطابقة فى مجتمعين أو أكثر. وسوف نرمز لفرض العدم بالرمز H_0.

الفرض البديل :

وهو الفرض بأن معلما من معالم مجتمع ما يختلف عن قيمة معينة أو أن معلما ما يأخذ قيما مختلفة فى مجتمعين أو أكثر. وسوف نرمز للفرض البديل بالرمز H_1.

مثال (١)

يريد باحث أن يعرف إذا كان استخدام عقار معين له تأثير جانبى على متعاطيه من المرضى، وهو مهتم بصفة خاصة بمعدل نبض المريض: هل يزيد أو ينقص أو يظل كما هو؟ [معدل نبض الشخص العادى هو 82 نبضة فى الدقيقة].

فى هذه الحالة فإن المجتمع الذى نجرى الاختبار عليه هو مجموعة المرضى الذين يتعاطون هذا العقار، والمعلم الذى نريد اختباره μ هو متوسط معدل النبض. وعلى ذلك يكون فرض العدم هو:

$$H_0 : \mu = 82$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \mu \neq 82$$

مثال (٢)

يدعى كيميائى أنه قد توصل إلى مادة كيميائية، إذا أضيفت إلى بطانة الحوائط فإنها تعزلها بدرجة كافية بحيث تقلل قيمة فاتورة الكهرباء بدرجة ملحوظة. وتفكر شركة بناء تجريب هذا الاختراع لتعرف صحة الادعاء من عدمه. [متوسط فواتير الكهرباء لمثل تلك المساكن هو LE 78].

فى هذه الحالة فإن المجتمع الذى نريد أن نجرى الاختبار عليه هو مجموعة المساكن التى ستستخدم هذا المركب ويكون المعلم هو متوسط استهلاك الكهرباء μ. وعلى ذلك فرض العدم هو:

$$H_0 : \mu \geq 78$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \mu < 78$$

مثال (٣)

يعتقد المدير الإدارى لمستشفى أن الانحراف المعيارى لعدد الذين يترددون على العيادات الخارجية يزيد على الانحراف المعيارى المعتاد وهو 8. أكتب فرض العدم والفرض البديل.

فى هذه الحالة فإن المجتمع الذى نجرى الاختبار عليه هو المجتمع الذى نريد الاختبار عليه هو مجموعة المرضى الذين يترددون على العيادات الخارجية والمعلم الذى نريد اختباره هو التباين σ^2. وعلى ذلك فرض العدم هو:

$$H_0 : \sigma^2 \leq 64$$

أما الفرض البديل فيكون:

$$H_1 : \sigma^2 > 8$$

٤ـ ٤ تصميم الدراسة الإحصائية

بعد تحديد فرض العدم والفرض البديل فإن الباحث الإحصائى يضع تصميما للدراسة الإحصائية التى سيقوم بها. وفى هذا الصدد فإنه يختار الاختبار الإحصائى الملائم للمعلم ثم يختار مستوى مناسبا للمعنوية.

٤ـ ٤ـ١ الاختبارات الإحصائية المتداولة

بادئ ذى بدء فإننا نستطيع القول بأن الاختبار الإحصائى يستخدم البيانات التى نحصل عليها من عينة أو أكثر لنأخذ قرارا هل تقبل أو نرفض فرض العدم. وتبنى معظم الاختبارات الإحصائية للفروض على القاعدة العامة الآتية:

$$\text{القيمة الاختبارية} = \frac{\text{القيمة المشاهدة} - \text{القيمة المتوقعة}}{\text{الخطأ المعيارى}}$$

وسنتعرض فى دراستنا لعدة اختبارات إحصائية طبقا للمعالم المراد إجراء الاختبارات عليها:

- إذا كان المعلم المراد إجراء الاختبار عليه هو المتوسط الحسابى μ لمجتمع ما فإن الاختبار المناسب هو اختبار z أو اختبار t وفقا لقاعدة سنذكرها فى حينها.
- إذا كان المعلم المراد إجراء الاختبار عليه هو التباين لمجتمع ما فإن الاختبار المناسب هو اختبار .
- إذا كنا بصدد المقارنة بين متوسطين حسابيين ، لمجتمعين مستقلين فإن الاختبار المناسب هو اختبار z.

١١ـ ٤ـ٢ مستوى المعنوية

فى اختبار الفروض إما أن يكون فرض العدم صحيحا أو خاطئا وفى نفس الوقت لكل من هاتين الحالتين إما أن نقبل فرض العدم أو نرفضه. إذن توجد أربع حالات مبينة بالجدول الآتى:

	فرض العدم صحيح	فرض العدم خاطئ
نقبل فرض العدم		
نرفض فرض العدم		

ويكون حكمنا صحيحا إذا كان فرض العدم صحيحا وقبلناه أو إذا كان خاطئا ورفضناه. أما فى الحالتين الأخريين فنكون قد ارتكبنا خطأ فى حكمنا وذلك حسب الجدول الآتى:

	فرض العدم صحيح	فرض العدم خاطئ
نقبل فرض العدم	الحكم صائب	خطأ من النوع الثانى
نرفض فرض العدم	خطأ من النوع الأول	الحكم صائب

ويقصد بمستوى المعنوية الحد الأقصى لارتكابنا خطأ من النوع الأول بالنسبة لفرض العدم ويرمز له بالرمز α. أى أن:

$$\alpha = P\,(\text{type I error})$$

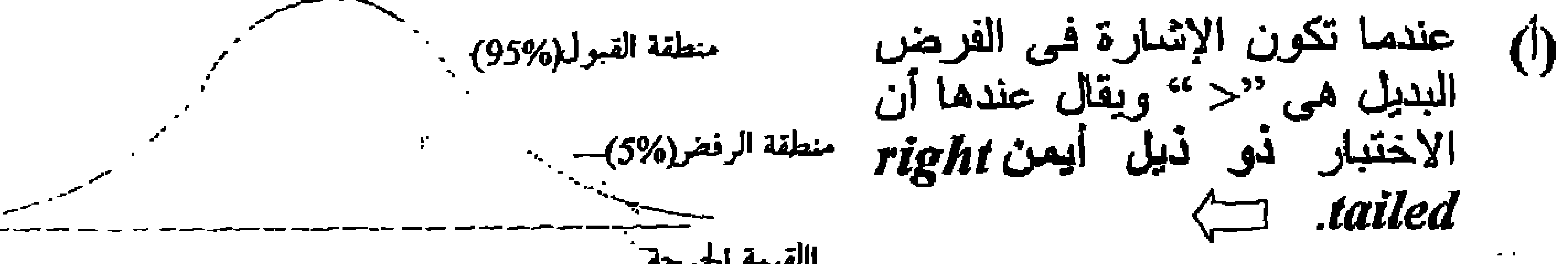
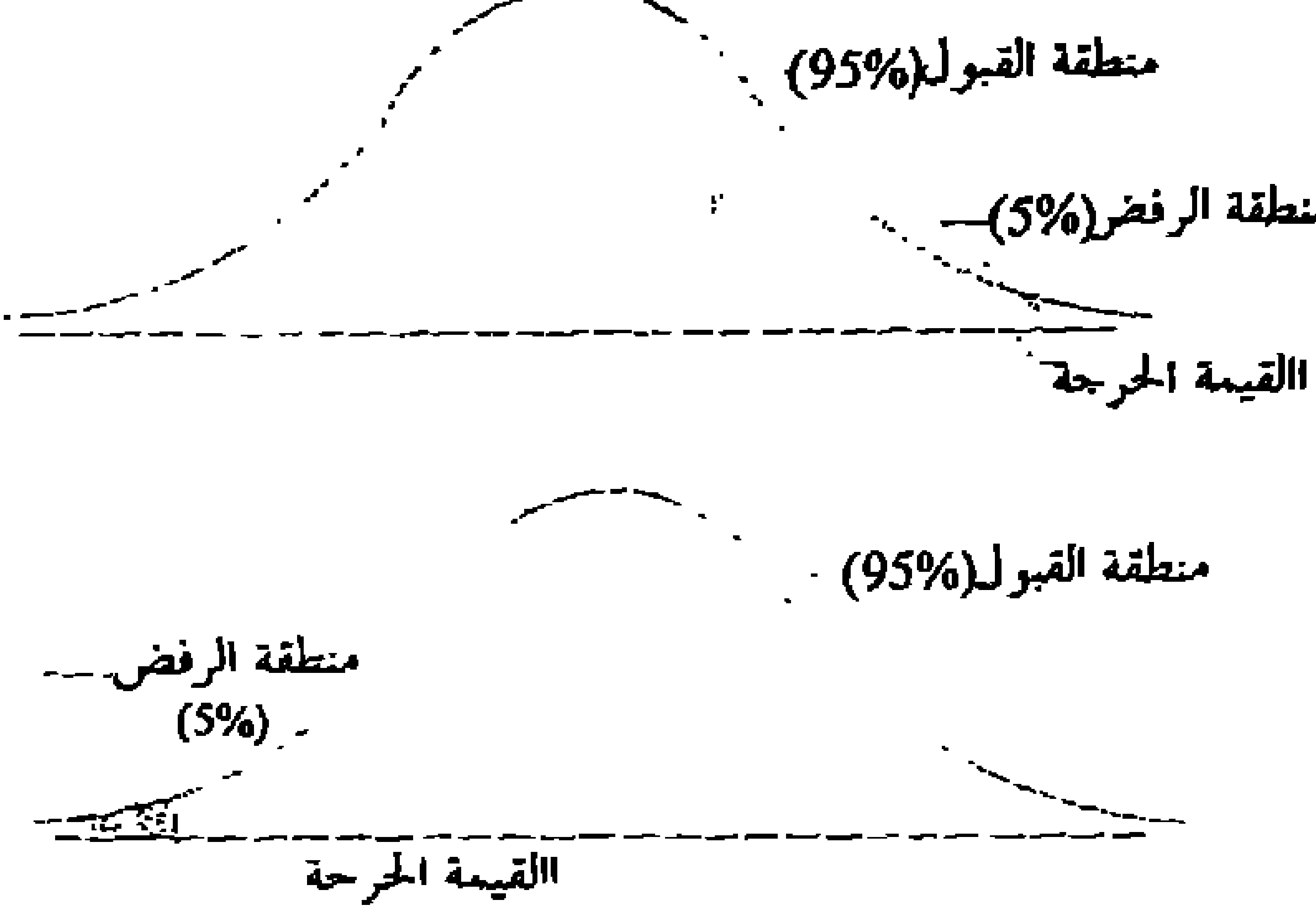
أما إذا ارتكبنا خطأ من النوع الثانى فإن الحد الأقصى لاحتمال ارتكابنا لهذا الخطأ فنرمز له بالرمز β.أى أن:

$$\beta = P\,(\text{type II error})$$

وسنكون معنيين فى الدراسة الحالية بقيمة α. وإذا حددنا مستوى معنوية α فإننا ننظر فى جدول التوزيع الإحصائى المناسب حتى نوجد **'القيمة الحرجة'** ***'critical value'*** (C.V.) المناسبة وهذه القيمة تقسم التوزيع الإحصائى إلى منطقتين: **'منطقة الرفض'** ***'rejection region'*** ، **'منطقة القبول'** ***'acceptance region'***.

مثال (١)

ليكن مستوى المعنوية هو 0.05 وليكن التوزيع الإحصائى هو توزيع z الطبيعى. نرسم كروكيا يبين التوزيع الطبيعى. وهنا تبرز ثلاث حالات:

(أ) عندما تكون الإشارة فى الفرض البديل هى "<" ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيل أيمن ***right tailed***. ⇦

(ب) عندما تكون الإشارة فى الفرض البديل هى ">" ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيل أيسر ***left tailed***. ⇦

منطقة القبول(95%)
منطقة رفض (2.5%)
منطقة رفض (2.5%)
قيمة حرجة
قيمة حرجة

(ج) عندما تكون الإشارة فى الفرض البديل هي "≠" ويقال عندها أن الاختبار ذو ذيلين ***two tailed***. ⇦
(لاحظ تقسيم مستوى المعنوية على الطرفين بالتساوى).

والآن بالنظر إلى جدول التوزيع الطبيعى (z-distribution : tail values) فنجد الآتى:

فى الحالة (أ) ، (ب) نبحث فى وسط الجدول عن أقرب عدد للقيمة 0.05 فنجده 0.0445 وهو عند تقاطع الصف أمام 1.6 والعمود تحت 0.05 فنستنتج أن القيمة الحرجة هى 1.65.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

فى الحالة (ج) نبحث فى وسط الجدول عن القيمة 0.025 فنجده 0.0445 وهو عند تقاطع الصف أمام 1.9 والعمود تحت 0.06 فنستنتج أن القيمة الحرجة هى ±1.96.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233

مثال (٢)

ليكن مستوى المعنوية هو 0.05 وليكن التوزيع الإحصائى هو توزيع χ^2 بدرجة حرية 15 وليكن الاختبار 'ذو ذيل جهة اليمين'.

منطقة القبول(0.95)

منطقة الرفض(0.05)

القيمة الحرجة

ننظر فى جدول توزيع فى الصف أمام 15والعمود تحت 0.05 فنجد القيمة الحرجة 24.996.

جدول χ^2

v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17

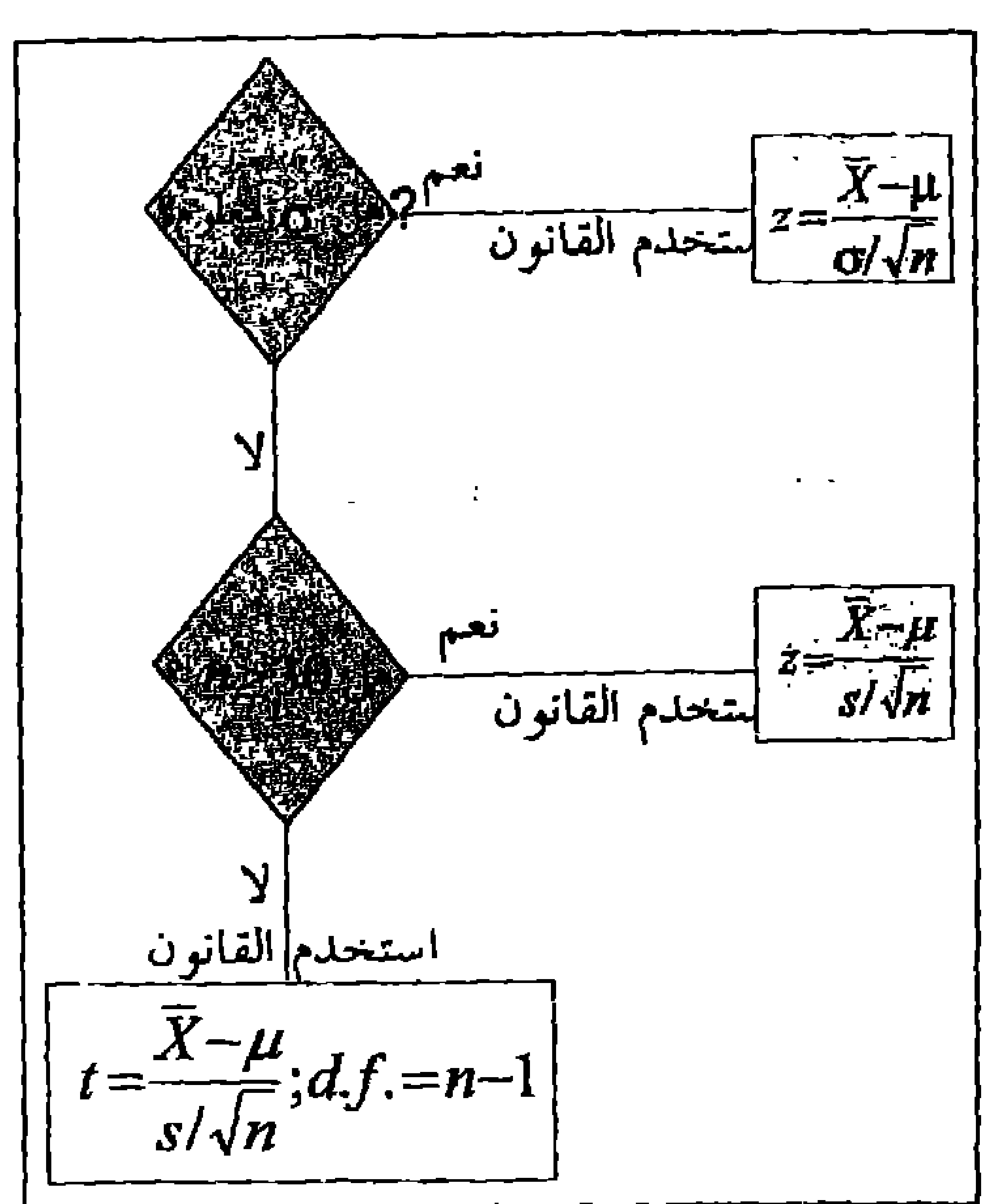
١١ـ ٥ إختبار الفروض للوسط الحسابى

اتفق علماء الإحصاء أن الاختبار الإحصائى المناسب هنا هو إما اختبار z أو اختبار t وفقا للقاعدة الآتية:

- إذا كان الانحراف المعيارى σ للمجتمع موضوع الدراسة معلوم فإننا نستخدم اختبار z بالقانون:

$$z=\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

حيث $\overline{X}$ الوسط الحسابى للعينة، μ الوسط الحسابى للمجتمع، n حجم العينة.



➢ إذا كان الانحراف المعيارى σ للمجتمع موضوع الدراسة غير معلوم وكان حجم العينة المستخدمة أكبر من أو يساوى 30 فإننا نستخدم اختبار z بالقانون:

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

حيث s الانحراف المعيارى للعينة.

➢ إذا كان الانحراف المعيارى σ للمجتمع موضوع الدراسة غير معلوم وكان حجم العينة المستخدمة أقل من 30 فإننا نستخدم اختبار t بالقانون:

$$t=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

بدرجة حرية (degree of freedom $d.f.$) $\nu = n-1$.

١-٥-١ خطوات إختبار الفروض للوسط الحسابى

الخطوة الأولى: تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1. وهذه الخطوة تتطلب أن نحدد أولا المجتمع الذى سنجرى عليه الاختبار

الخطوة الثانية: إيجاد تحديد القيمة الحرجة فى اختبار z أو t المقابلة لمستوى المعنوية. ويجدر بنا هنا أن نذكر القيم الحرجة المقابلة للمستويات المعنوية الشهيرة فى اختبار z وهى كما يلى:

0.01	0.05	0.10	مستوى المعنوية α / نوع الاختبار	
2.33	1.65	1.28	$H_0:\mu\leq k\ ,\ H_1:\mu>k$	ذو ذيل جهة اليمين
−2.33	−1.65	−1.28	$H_0:\mu\geq k\ ,\ H_1:\mu<k$	ذو ذيل جهة اليسار
±2.58	±1.96	±1.65	$H_0:\mu=k\ ,\ H_1:\mu\neq k$	ذو ذيلين

الخطوة الثالثة: إجراء حسابات الاختبار الإحصائى باستخدام أحد القوانين:

$$z=\frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad z=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}} \quad \text{أو} \quad t=\frac{\bar{X}-\mu}{s/\sqrt{n}}$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم حسب وجود قيمة الاختبار فى منطقة القبول أو منطقة الرفض

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

مثال (١)

يقرر باحث أن متوسط راتب المدرس عضو هيئة التدريس يزيد عن 42,000 جنيه سنويا. اختيرت عينة من 30 مدرسا ووجد أن متوسط الرواتب هو 43,260 جنيها. اختبر صحة التقرير بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ إذا علمت أن الانحراف المعيارى للمجتمع يساوى 5,230جنيها.

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0: \mu \leq 42,000$, $H_1: \mu > 42,000$ (الادعاء)

حيث أن الانحراف المعيارى للمجتمع معلوم، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار z باستخدام القانون:

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار هنا هو اختبار ذو ذيل أيمن.

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

بالنظر فى جدول القيم الحرجة نجد أن تلك القيمة هى 1.65

منطقة القبول(95%)

منطقة الرفض(5%)

1.32 1.65

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{43,260 - 42,000}{5230 / \sqrt{30}} = 1.32$$

واضح أن هذه القيمة فى منطقة القبول.

الخطوة الرابعة. قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهى 1.32 تقع فى منطقة القبول، إذن يتعين علينا قبول فرض العدم وبالتالى رفض الادعاء المذكور فى التقرير.

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لتبنى ما قرره الباحث من أن راتب المدرس عضو هيئة التدريس يزيد عن يزيد عن 42,000 جنيه سنويا.

مثال (٢)

يدعى منظم مباريات أن متوسط تكلفة الحذاء الرياضى أقل من 80 جنيها. اختيرت عينة من 36 حذاء من كتالوجات مختلفة ووجدت الأسعار كالآتى:

60	70	75	55	80	55	50	40	80
70	50	95	120	90	75	85	80	60
110	65	80	85	85	45	75	60	90
90	60	95	110	85	45	90	70	70

هل يوجد دليل كاف لتبنى ما قرره المنظم بمستوى معنوية 0.10 ؟

الحــــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0: \mu \geq L.E.80$, $H_1: \mu < L.E.80$ (الادعاء)

الانحراف المعيارى للمجتمع غير معلوم، ولكن حجم العينة يساوى $36 > 30$.

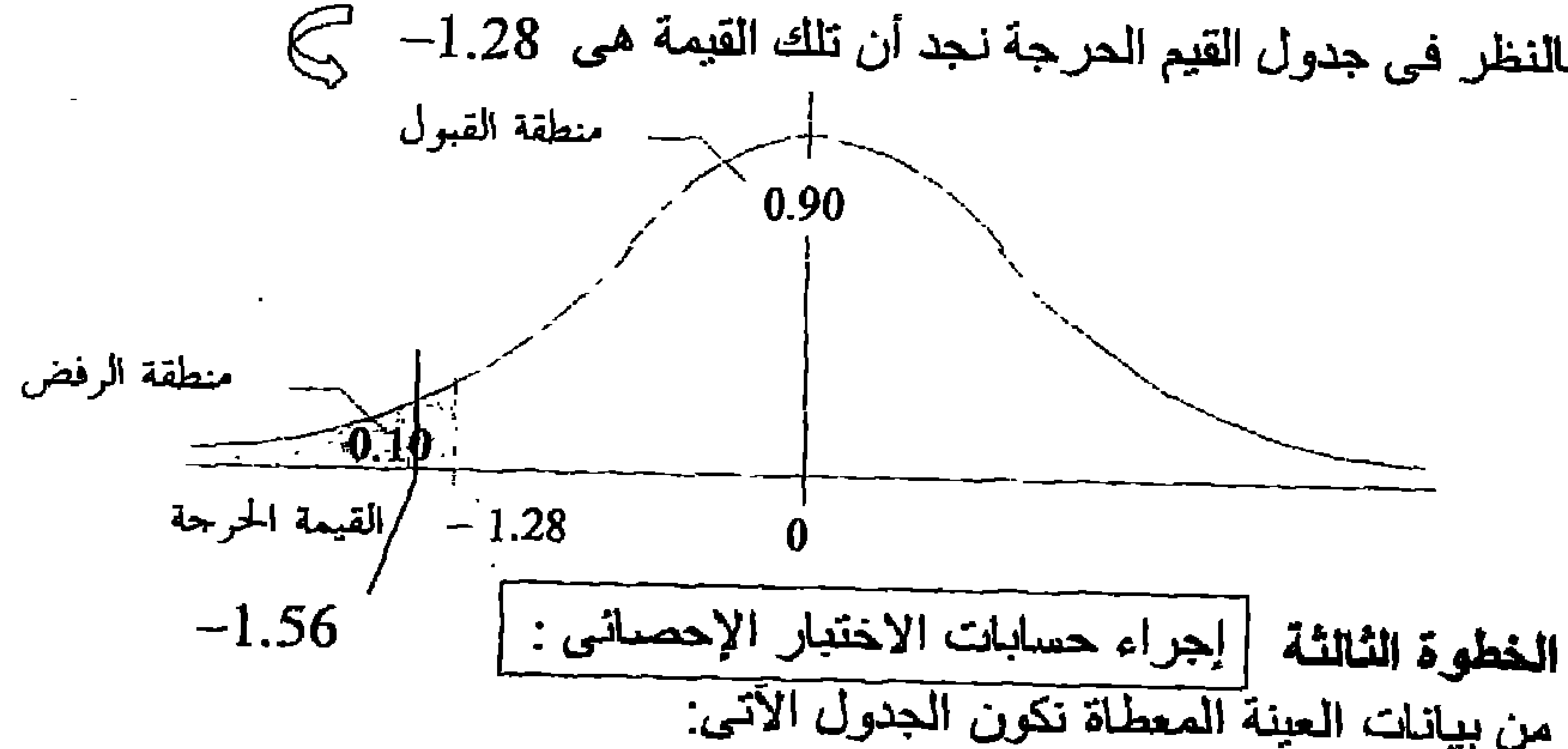
إذن فالاختبار المناسب هو اختبار z باستخدام القانون:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار هنا هو اختبار ذو ذيل أيسر.

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة z

بالنظر فى جدول القيم الحرجة نجد أن تلك القيمة هى -1.28



الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

من بيانات العينة المعطاة تكون الجدول الآتى:

من بيانات العينة المعطاة فإن $\bar{X} = 75$ ، $s = 19.1$. وعليه فإن:

$$z = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{75 - 80}{19.1 / \sqrt{36}} = \frac{-5}{3.2} = -1.56$$

وهذه القيمة تقع فى منطقة الرفض.

الخطوة الرابعة. قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهى 1.56− تقع فى منطقة الرفض، إذن يتعين علينا رفض فرض العدم وبالتالى قبول ادعاء المنظم.

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

يوجد دليل كاف لتبنى ما قرره المنظم من أن تكلفة الحذاء الرياضى أقل من 80 جنيها.

مثال (٣)

تقرر مؤسسة لإعادة تأهيل مرضى الانهيار العصبى أن متوسط التكلفة للمريض هى 24,672 جنيه. أخذ باحث عينة من 35 مريضا فوجد أن متوسط التكلفة هو 25,226 جنيه. فإذا كان الانحراف المعيارى حسب معايير المؤسسة يساوى 3,251 جنيها فهل نستطيع أن نقرر أنه بمستوى معنوية 0.01 فإن متوسط تكلفة المريض تختلف عن 24,672 جنيه؟

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0: \mu = \text{L.E. } 24{,}672$, $H_1: \mu \neq \text{L.E. } 24{,}672$ (الادعاء)

الانحراف المعيارى للمجتمع معلوم. إذن فالاختبار المناسب هو اختبار z باستخدام القانون:
وواضح أن الاختبار ذو ذيلين.

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}}$$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة.

حيث أن الاختبار ذو ذيلين ومستوى معنوية كلى 1%، فإن مستوى المعنوية لكل من الذيلين يساوى 0.005. وقد عمل حساب هذا فى جدول القيم الحرجة. وبالنظر فى هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما 2.58 ± وهما القيمتان اللتان كنا سنحصل عليهما من جدول التوزيع الطبيعى عند البحث عن القيمة المناظرة لأقرب قيمة لـ 0.005.

منطقة القبول

0.01

منطقة الرفض اليسرى

منطقة الرفض اليمنى

0.005 0.005

− 2.58 2.58

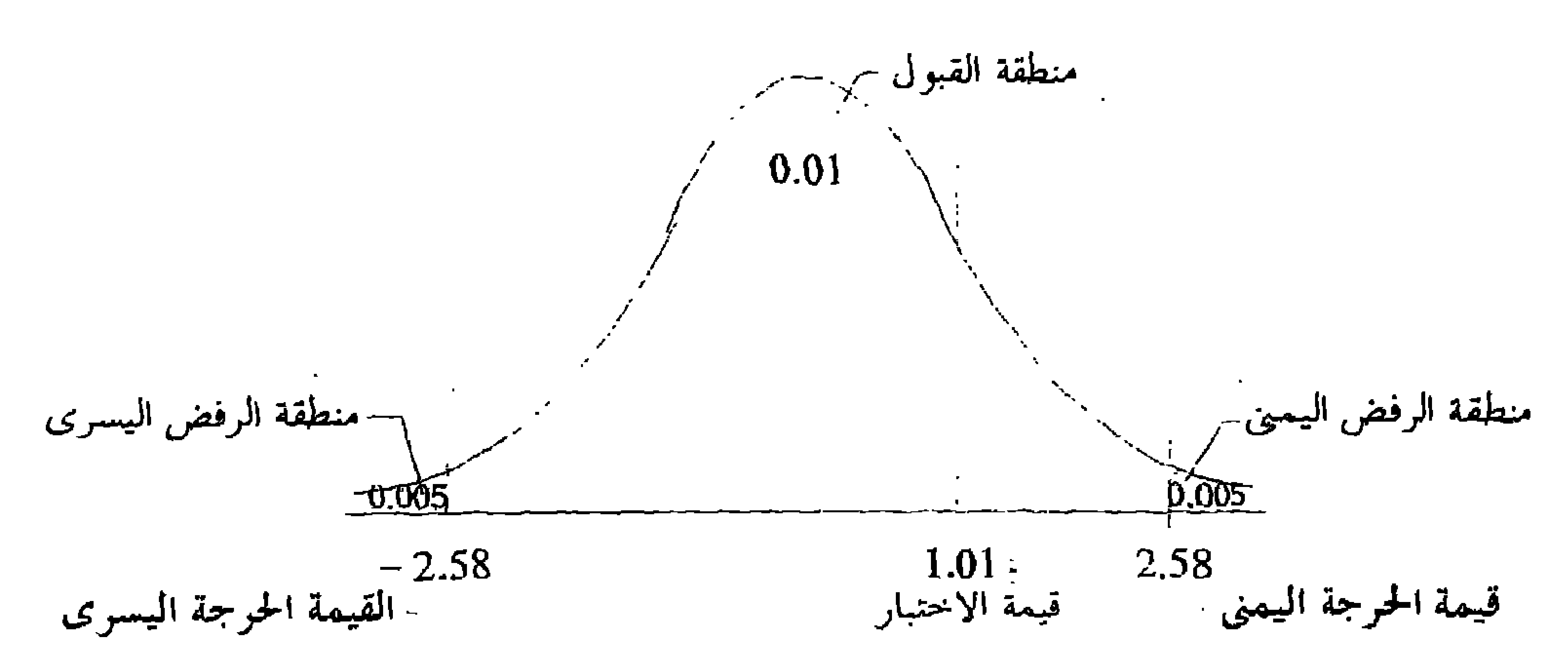
القيمة الحرجة اليسرى

القيمة الحرجة اليمنى

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} = \frac{25{,}226 - 24{,}672}{3251 / \sqrt{35}} = 1.01$$

وهذه القيمة تقع بين القيمتين الحرجتين.



الخطوة الرابعة | قبول أو رفض فرض العدم |

حيث أن قيمة الاختبار وهى 1.01 تقع بين القيمتين الحرجتين، إذن يتعين علينا قبول فرض العدم وبالتالى رفض الادعاء.

الخطوة الخامسة | إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء |

لا يوجد دليل كاف لنقرر أن تكلفة المريض تختلف عن 24,672 جنيه.

مثال (٤)

تدعى شركة توظيف أن مرتب رئيسة تمريض يبدأ بـ 24,000 جنيه سنويا. أخذت عينة من عشر رئيسات للتمريض فوجد أن متوسط مرتبهن السنوى هو 23,450 جنيه بانحراف معيارى 400جنيه. هل يوجد دليل كاف بمستوى معنوية 0.05 لأن نرفض ادعاء شركة التوظيف؟

الحـــل

الخطوة الأولى | تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1 |

H_0: $\mu <$ L.E. 24,000, H_1 : $\mu \geq$ L.E. 24,000 (الادعاء)

الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم، وحجم العينة صغير، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار t باستخدام القانون:

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار ذو ذيل أيمن.

الخطوة الثانية | إيجاد تحديد القيمة الحرجة |

من جدول t عند درجة حرية 9 ومستوى معنوية 5% نجد أن القيمة الحرجة تساوى 1.83 .

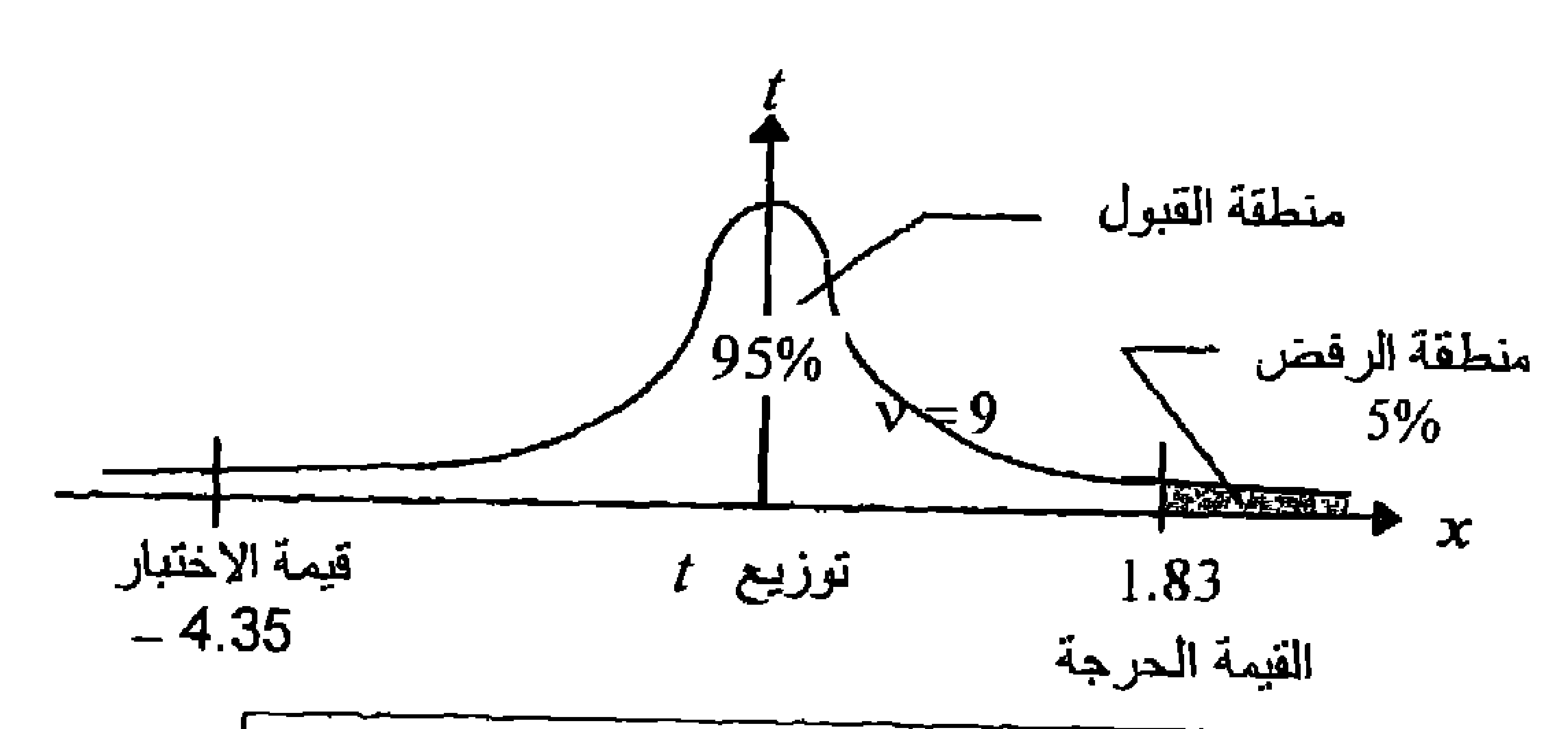
v	Two-tailed tests					v
	10%	5%	2%	1%	0.1%	
7	1.89	2.36	3.00	3.50	5.40	7
8	1.86	2.31	2.90	3.36	5.04	8
9	1.83	2.26	2.82	3.25	4.78	9
10	1.81	2.23	2.76	3.17	4.59	10
11	1.80	2.20	2.72	3.11	4.44	11
12	1.78	2.18	2.68	3.05	4.32	12
	5%	2.5%	%1	0.5%	0.05%	
One-tailed tests						

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$t = \frac{\overline{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{23{,}450 - 24{,}000}{400 / \sqrt{10}} = -4.35$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن قيمة الاختبار وهى 4.35 – تقع فى منطقة القبول، إذن يتعين علينا قبول فرض العدم وبالتالى رفض الادعاء.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لايوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن الراتب السنوى لرئيسة التمريض يبدأ بـ 24,000 جنيه.

مثال (٥)

يدّعى خبير تعليم أن ما يحصل عليه المدرس المنتدب فى بعض المدارس الريفية يقل عن 60 جنيها فى اليوم. أخذت عينة من 8 مدارس فى مناطق ريفية مختلفة فوجدت الرواتب اليومية للمدرس المنتدب بها (بالجنيه) كالآتى:

60 56 60 55 70 55 60 55

عند مستوى معنوية 0.10 هل يوجد دليل كاف لأن نقبل ادعاء الخبير؟

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0: \mu \geq$ L.E. 60, $H_1: \mu <$ L.E. 60 (الادعاء)

الانحراف المعيارى للمجتمع σ غير معلوم، وحجم العينة صغير، إذن فالاختبار المناسب هو اختبار t باستخدام القانون:

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

وواضح أن الاختبار ذو ذيل أيسر.

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

من جدول t عند درجة حرية 7 ومستوى معنوية 0.10 نجد أن القيمة الحرجة تساوى 1.415−

ν	Two-tailed tests							ν
	50%	20%	10%	5%	2%	1%	0.1%	
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869	5
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	0.711	1.415	1.895	2.365	3.998	3.499	5.408	7
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
ν	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	ν
	One-tailed tests							

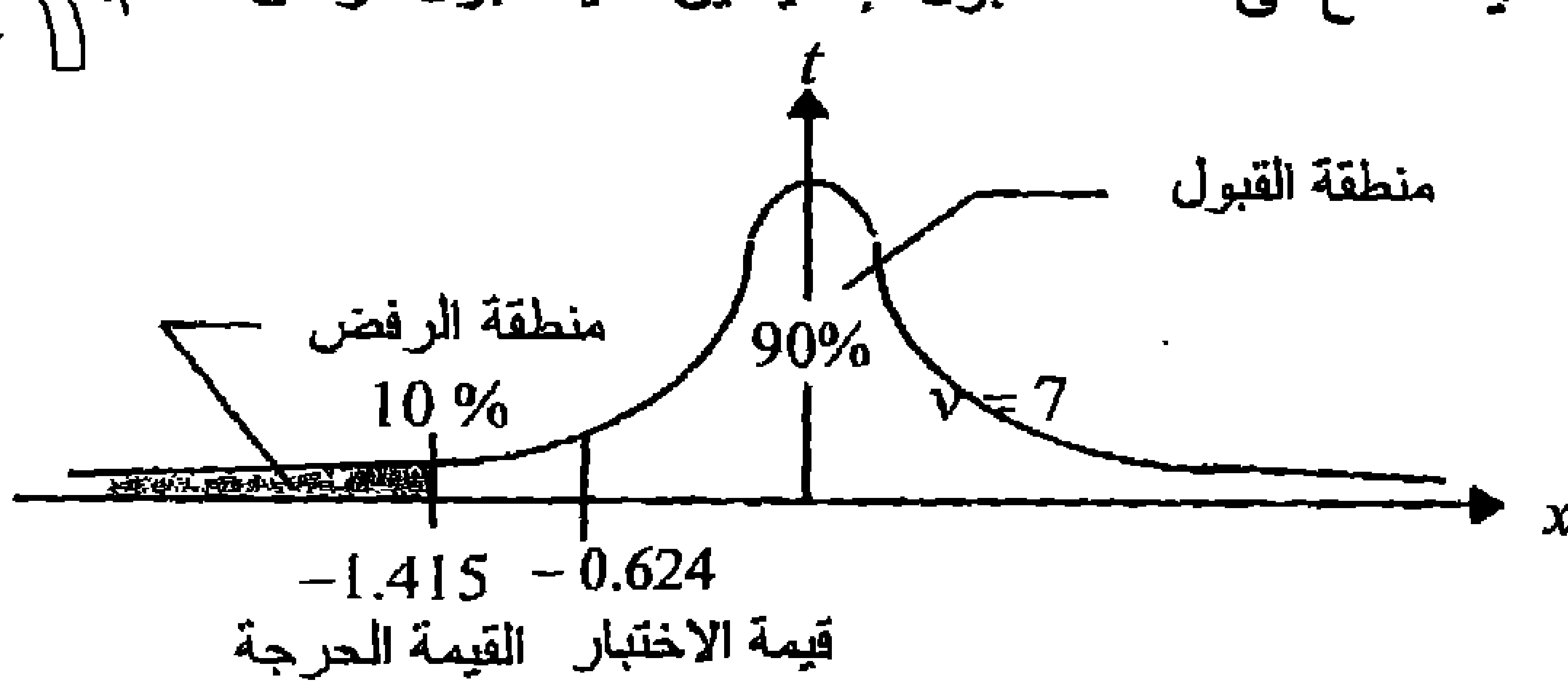
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

باستخدام البيانات المعطاة لنا نجد أن ، $s = 5.08$.

$$t = \frac{\bar{X} - \mu}{s / \sqrt{n}} = \frac{58.88 - 60}{5.08 / \sqrt{8}} = -0.624$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة تقع فى منطقة القبول فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لأن نقبل ادعاء الخبير بأن متوسط الراتب اليومى للمدرس المنتدب فى المناطق الريفية أقل 60 جنيها.

٤ ـ ٦ إختبار الفروض للنسب

فى كثير من حالات اختبار الفروض نكون معنيين بالنِسب. فمثلا:

- قد تريد شركة متخصصة فى تسويق الهدايا أن تعلم أن 59%من العملاء يشترون هدايا لآبائهم.
- قد تريد شركة مسابقات عن طريق التليفزيون معرفة أن 83%من المشاهدين الذين يشتركون فى تلك المسابقات فوق سن 21سنة.
- قد يريد باحث التثبت من أن 51%من الطلاب الجامعيين يشترون أطعمة جاهزة.
- قد يريد بيت من بيوت الأزياء أن يعرف أن 35% من العميلات يفضلن اللون الأحمر.

ويعتبر اختبار الفروض للنسبة من مجتمع ما بمثابة تجربة ذات الحدين عندما يكون هناك ناتجين وعندما يكون احتمال النجاح p لا يتغير عبر المحاولات المختلفة.

ومن المعلوم أن المتوسط فى توزيع ذى الحدين هو np والانحراف المعيارى $\sqrt{npq}$

وحيث أن التوزيع الطبيعى يمكن أن يستخدم كتقريب لتوزيع ذى الحدين عندما يكون $np \geq 5$ ، $nq \geq 5$ فإن التوزيع الطبيعى يمكن أن يستخدم فى اختبار النسبة. وسنستخدم القانون:

$$z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq / n}}$$

حيث $\hat{p} = X / n$ (نسبة العينة)، p النسبة المفترضة فى المجتمع، n حجم العينة. وهذا القانون يتبع القاعدة العامة:

القيمة الاختبارية = (القيمة المشاهدة — القيمة المتوقعة) / الخطأ المعيارى

وستتبع نفس الخطوات المتبعة فى اختبار فروض المتوسط الحسابى فى اختبار إلنسبة.

مثال (١)

يدّعى خبير تربوى أن نسبة تسرب التلاميذ من التعليم الابتدائى فى قرية ما هى 15%. أخذت عينة من 200 تلميذ ووجد أن 38 تلميذ منهم تركوا التعليم الابتدائى. باتخاذ مستوى معنوية 5% هل هناك دليل كاف على رفض ادعاء الخبير؟

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0 : p = 15\,\%$ (الادعاء) , $H_1 : p \neq 15\%$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذو ذيلين، فإن مستوى المعنوية لكل منهما يساوى 0.025. وقد عمل حساب ذلك فى جدول القيم الحرجة. وبالنظر فى هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما ± 1.96 .

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$q = 85\% \quad ، \quad p = 15\% \quad ، \quad \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{38}{200} = 0.19$$

$$\therefore \quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.19 - 0.15}{\sqrt{(0.15)(0.85)/200}} = 1.58$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة 1.58 تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء)

منطقة القبول
0.95
منطقة الرفض اليسرى 0.025
منطقة الرفض اليمنى 0.025
- 1.96   0   1.58 1.96
القيمة الحرجة اليسرى   قيمة الاختبار   القيمة الحرجة اليمنى

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

لا يوجد دليل كاف لأن نرفض ادعاء الخبير بأن نسبة تسرب التلاميذ من التعليم الابتدائى فى القرية هى 15%.

مثال (٢)

تقول تقارير شركة اتصالات بأن 40% من مشتركيها يستخدمون خاصية الانتظار. اختير 100 مشترك ووجد أن 37 منهم يستخدمون خاصية الانتظار. هل هناك دليل كاف مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ على أن نرفض ما ذكر فى التقرير؟

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0: p = 0.40$ (الادعاء) , $H_1: p \neq 0.40$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذو ذيلين، فإن مستوى المعنوية لكل منهما يساوى 0.025. وقد عمل حساب ذلك فى جدول القيم الحرجة. وبالنظر فى هذا الجدول نجد أن القيمتين الحرجتين هما ± 2.58 .

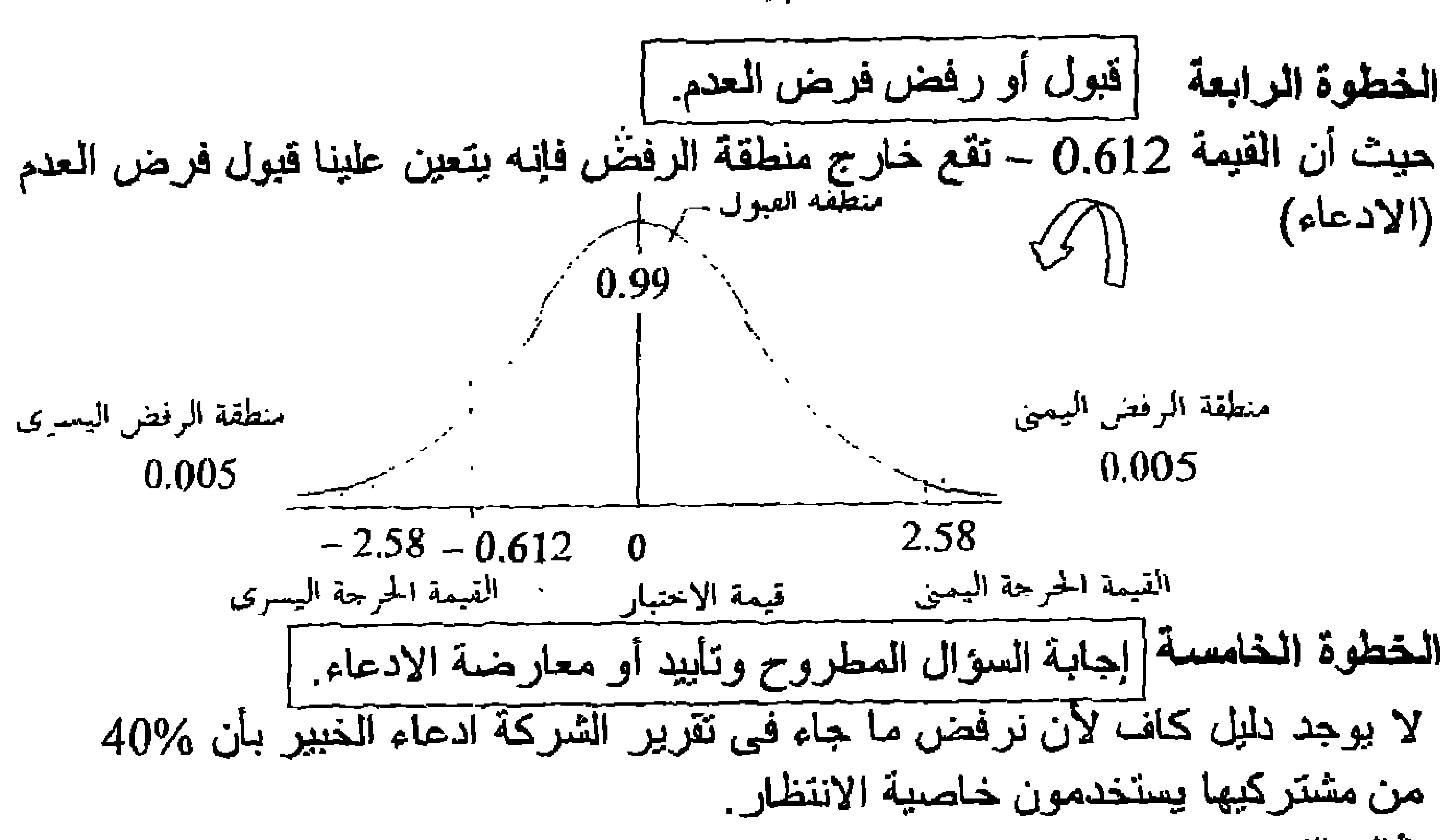
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$q = 60\% \quad ، \quad p = 40\% \quad ، \quad \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{37}{100} = 0.37$$

$$\therefore \quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.37 - 0.40}{\sqrt{(0.40)(0.60)/100}} = -0.612$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 0.612 – تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء)



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

لا يوجد دليل كاف لأن نرفض ما جاء فى تقرير الشركة ادعاء الخبير بأن 40% من مشتركيها يستخدمون خاصية الانتظار.

مثال (٣)

كتبت إحدى الصحف أن نسبة 77% على الأقل من المجتمع يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية. للتأكد من هذا الادعاء أخذ باحث إحصائى عينة من 80 شخص ووجد أن 55 منهم يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية. باستخدام مستوى معنوية 0.01 هل يوجد دليل كاف لنصدق ادعاء الصحيفة؟

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1.

$H_0 : p \geq 77\%$ (الادعاء) , $H_1 : p < 77\%$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة.

حيث أن الاختبار ذو ذيل جهة اليسار، فبالنظر فى جدول القيم الحرجة نجد أن القيمة الحرجة هى 2.58– .

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$q = 23\% \quad , \quad p = 77\% \quad , \quad \hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{55}{80} = 0.6875$$

$$\therefore \quad z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{pq/n}} = \frac{0.6875 - 0.77}{\sqrt{(0.77)(0.23)/80}} = -0.75$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 0.75 – تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء).

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

يتعين علينا تصديق ادعاء الصحيفة بأن 77% من المجتمع على الأقل يعارضون استبدال عملة الجنيه الورقية بأخرى معدنية.

٤ - ٧ إختبار الفروض للتباين

فى اختبار الفروض لتباين مجتمع أو انحرافه المعيارى نستخدم توزيع متبعين الخطوات الآتية:

الخطوة الأولى. تحديد فرض العدم والفرض البديل، ويكونان بإحدى الصيغ الآتية:

$$H_0 : \sigma^2 \le {\sigma_0}^2 \;,\; H_1 : \sigma^2 > {\sigma_0}^2$$ (اختبار ذو ذيل أيمن)

$$H_0 : \sigma^2 \ge {\sigma_0}^2 \;,\; H_1 : \sigma^2 < {\sigma_0}^2$$ (اختبار ذو ذيل أيسر)

$$H_0 : \sigma^2 = {\sigma_0}^2 \;,\; H_1 : \sigma^2 \ne {\sigma_0}^2$$ (اختبار ذو ذيلين)

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة.

الاختبار المناسب هنا هو اختبار χ^2 وتوزيع χ^2 يعتمد على درجة الحرية $v = n - 1$ حيث n يساوى حجم العينة.

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى باستخدام القانون:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$$

حيث s^2 تباين العينة ، σ^2 تباين المجتمع، $v = n - 1$ درجة الحرية.

الخطوة الرابعة. قبول أو رفض فرض العدم حسب وجود قيمة الاختبار فى منطقة القبول أو منطقة الرفض

الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

مثال (١)

وجد معلم أن تباين الدرجات فى فصله المكون من 23 طالب وطالبة هو $s^2 = 198$ فى حين أن تباين الدرجات المعتاد هو $\sigma^2 = 225$ وتريد أن تختبر بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ ادعاء المعلم أن تباين الدرجات فى فصله يقل عن تباين المجتمع.

الحـــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$$H_0 : \sigma^2 \ge 225 \;,\; H_1 : \sigma^2 < 225$$ (الادعاء)

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذى ذيل أيسر ومستوى المعنوية هو 0.05 فيجب أن نبحث فى جدول χ^2 تحت القيمة 0.95 = 0.05 – 1 عند درجة حرية 22 = 1 – 23 = 1 – n فنجد القيمة الحرجة 12.3.

جدول χ^2

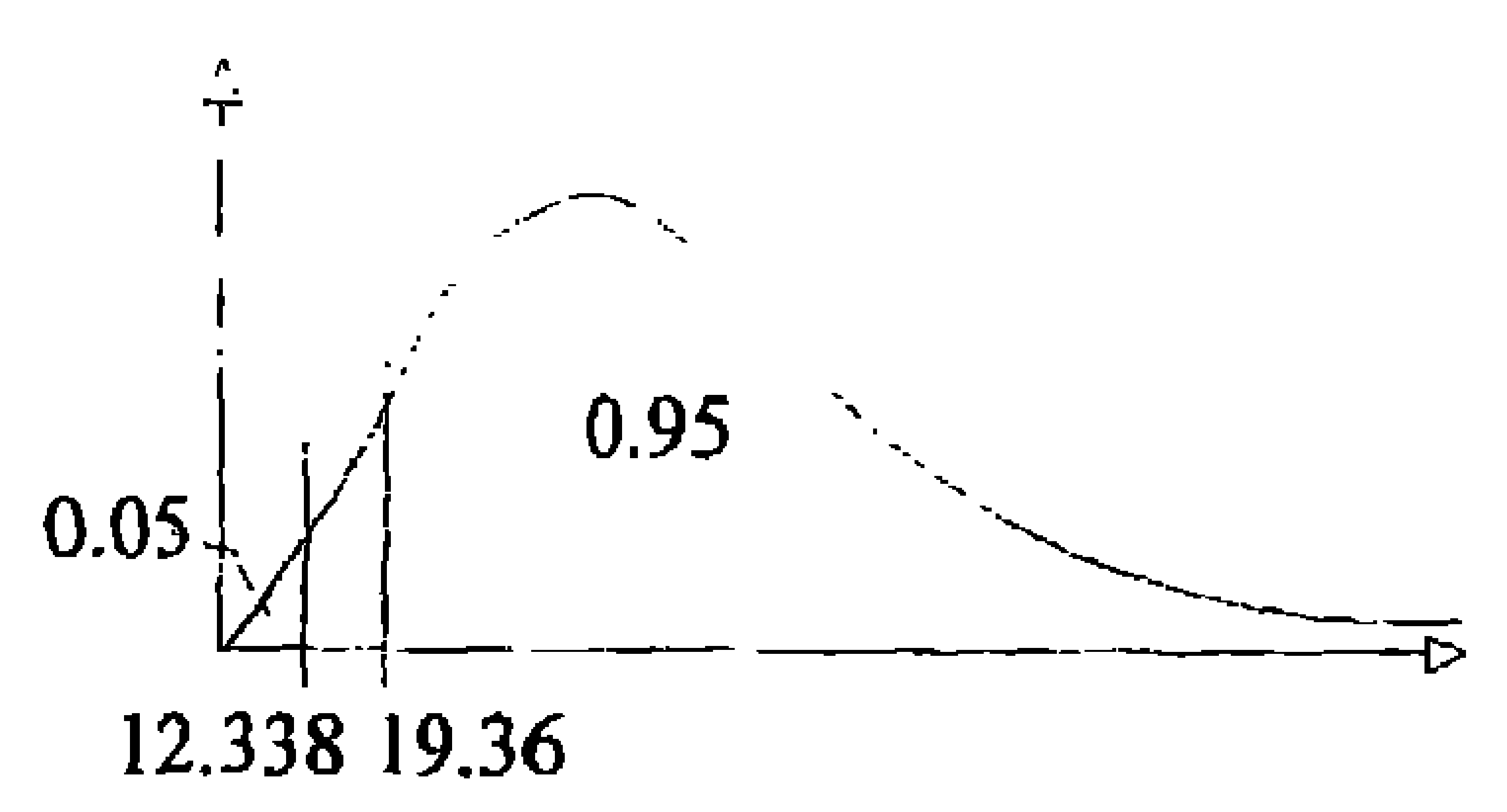
v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
22	8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(23-1)(198)}{225} = 19.36$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة 19.36 تقع خارج منطقة الرفض فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم (الادعاء).



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

لا يوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن تباين درجات الفصل أقل من تباين درجات المجتمع.

مثال (٢)

يعتقد المسئول الإدارى فى مستشفى أن الانحراف المعيارى لعدد المرضى الذين يترددون على عيادة جراحة اليوم الواحد يزيد عن 8. الجدول الآتى يبين عدد المترددين على تلك العيادة على مدى 15 يوما:

25	30	5	15	18	42	16	9	10	12	12	38	8	14	27

عند مستوى معنوية 10% هل نستطيع أن نقبل ادعاء المسئول الإدارى؟

الحـــــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0 : \sigma^2 \leq 64 \quad , \quad H_1 : \sigma^2 > 64$ (الادعاء)

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذى ذيل أيمن ومستوى المعنوية هو 0.10 وحجم العينة 15 فيجب أن نبحث فى جدول χ^2 تحت القيمة 0.05 عند درجة حرية $n - 1 = 15 - 1 = 14$ فنجد القيمة الحرجة 21.1.

جدول χ^2

ν	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	ν
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16

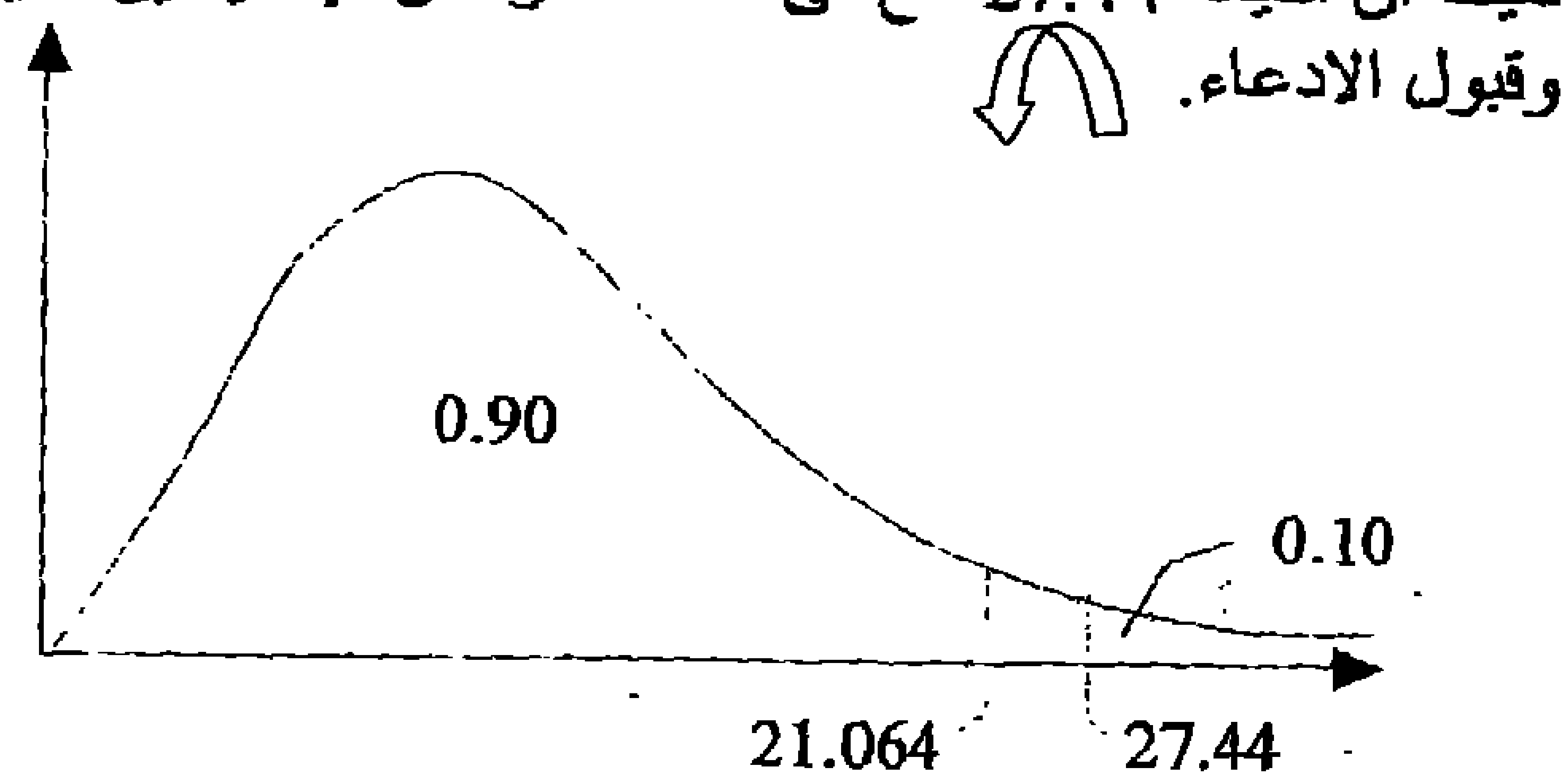
الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

من البيانات المعطاه بالجدول نجد أن التباين للعينة هو 125.44 . إذن:

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(14)(125.44)}{64} = 27.44$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم

حيث أن القيمة 27.44 تقع فى منطقة الرفض فإنه يتعين علينا رفض فرض العدم وقبول الادعاء.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء

يوجد دليل كاف لأن تقبل الادعاء بأن الانحراف المعيارى لعدد المرضى الذين يترددون على عيادة جراحة اليوم الواحد يزيد عن 8.

مثال (٣)

تريد شركة لتصنيع السجائر أن تختبر الادعاء بأن تباين محتويات النيكوتين فى إنتاج الشركة يساوى 0.644 (بمربع الملليجرام). أخذت عينة من 20 سيجارة وحُسِب الانحراف المعيارى لمحتوى النيكوتين فوجد أنه يساوى 1.00 ميلليجرام. بمستوى معنوية 0.05 هل هناك دليل كاف لقبول الادعاء؟

الحــــل

الخطوة الأولى تحديد فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1

$H_0 : \sigma^2 = 0.644$ (الادعاء) , $H_1 : \sigma^2 \neq 0.644$

الخطوة الثانية إيجاد تحديد القيمة الحرجة

حيث أن الاختبار ذى ذيلين ومستوى المعنوية هو 0.05 وحجم العينة 20 فيجب أن نبحث فى جدول χ^2 تحت القيمتين 0.025 ، 0.975 عند درجة حرية $20 - 1 = 19$ فنجد القيمتين الحرجتين 32.9، 8.91.

جدول χ^2

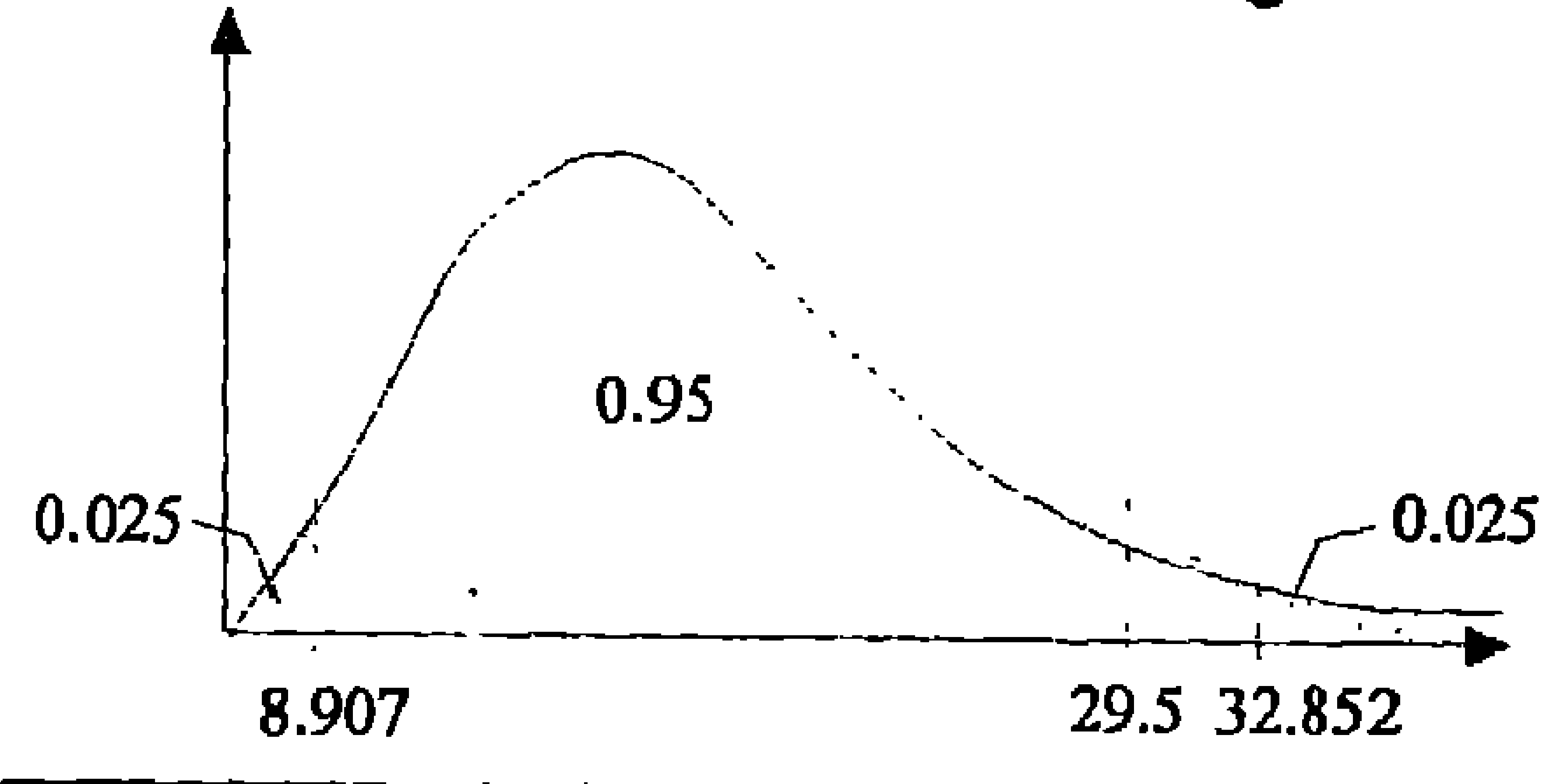
v	99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	v
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20

الخطوة الثالثة إجراء حسابات الاختبار الإحصائى :

$$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} = \frac{(19)(1.0)^2}{0.644} = 29.5$$

الخطوة الرابعة قبول أو رفض فرض العدم.

حيث أن القيمة 29.5 تقع فى منطقة القبول فإنه يتعين علينا قبول فرض العدم.



الخطوة الخامسة إجابة السؤال المطروح وتأييد أو معارضة الادعاء.

يوجد دليل كاف لأن نقبل الادعاء بأن تباين محتويات النيكوتين فى إنتاج الشركة يساوى 0.644.

تمـــــرين ٤أ

١. عَرِّف "فرض العدم" ، "الفرض البديل" وأعط مثالا لكل منـــهما. مـــا الرمـــوز المستخدمة لكل منهما؟

٢. ما المقصود بـــ "النوع الأول للخطأ" ، "النوع الثانى للخطأ" وما الرموز المستخدمة لكل منهما؟ وما هى العلاقة بينهما؟

٣. ما المقصود بـــ "الاختبار الإحصائى"؟ اشرح الفرق بـــين "الاختبـــار ذو الـــذيل الواحد" ، "الاختبار ذو الذيلين". ومتى نستخدم كلا منهما؟

٤. ما المقصود بـــ "منطقة القبول" ، "منطقة الرفض"؟

٥. ما هى الخطوات المتبعة فى اختبارات الفروض؟

٦. استخدم جدول التوزيع الطبيعى فى إيجاد القيمة (القيم) الحرجة لكل من الحـــالات الآتية:

(أ) $\alpha = 0.01$ ، اختبار ذو ذيلين
(ب) $\alpha = 0.05$، اختبار ذو ذيل أيمن
(ج) $\alpha = 0.005$ ، اختبار ذو ذيل أيسر
(د) $\alpha = 0.10$، اختبار ذو ذيل أيسر
(هـ) $\alpha = 0.05$ ، اختبار ذو ذيلين
(و) $\alpha = 0.04$، اختبار ذو ذيل أيمن
(ز) $\alpha = 0.01$ ، اختبار ذو ذيل أيسر
(ح) $\alpha = 0.10$ ، اختبار ذو ذيلين
(ط) $\alpha = 0.02$ ، اختبار ذو ذيل أيمن
(ى) $\alpha = 0.02$، اختبار ذو ذيلين

٧. لكل من الادعاءات الآتية أكتب فرض العدم والفرض البديل:

(أ) متوسط العمر لسائقى التاكسى فى مدينة ما يساوى 36.3 عاما.

(ب) متوسط الدخل السنوى للممرضات فى ولاية أمريكية يساوى $36,250 .

(ج) متوسط أعمار لاعبى "الروديو" هو 27.6 عاما.

(د) متوسط معدل ضربات القلب لمتسابقات الجرى أقل من 72 ضربة فى

الدقيقة.

(هـ) متوسط سعر أجهزة الفيديو أكبر من 100 جنيه.

(و) متوسط قيم فواتير الكهرباء الشهرية فى عمارة من العمارات أكبر من 52 جنيه.

٨. فى كل من الحالات الآتية أجر الخطوات:

١) حدد الفرضين (العدم ، البديل) وبين الادعاء.

٢) أوجد القيمة (القيم) الحرجة.

٣) احسب قيمة (قيم) الاختبار.

٤) اتخذ القرار (قبول أو رفض فرض العدم).

٥) لخص النتيجة.

(أ) تقرر دراسة عن متوسط إيجار غرفة فى فندق من فنادق الأقصر هو 200 جنيه لليلة واحدة. لاختبار هذا الادعاء أخذ باحث عينة من 30 غرفة ووجد أن المتوسط هو 189 جنيه. فإذا علمت أن الانحراف المعيارى لمجتمع غرف الفنادق هو 8 جنيهات فهل على مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ يمكننا رفض الادعاء؟

(ب) قرر بنك اجتماعى أن متوسط السُّلَف التى يدفعها البنك لمشروعات شباب الخريجين هو مبلغ 32,620 جنيها فى حين تقول رابطة الخريجين أن المتوسط أقل من ذلك. وللتأكد من ذلك اخيرت عينة من 50 خريج ووجد أن المتوسط هو 29,950 جنيها بانحراف معيارى 11,000 جنيه. فهل نستطيع بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نتبنى ادعاء رابطة الخريجين؟

(ج) يقدر باحث أن متوسط العائد لأكبر استثمارات هو مبلـغ 24 مليـون جنيه. أخذت عينة عشوائية من 50 شركة ووجد أن العائدات (بـالمليون جنيه) هي:

178	122	91	44	35	61	56	46	20	32
30	28	28	20	27	29	16	16	19	15
41	38	36	15	25	31	30	19	19	19
24	16	15	15	19	25	25	18	14	15
24	23	17	17	22	22	21	20	17	20

بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ هل يوجد دليل كاف على ادعاء الباحث؟

(د) قال تقرير رسمي أن متوسط دخل عضو هيئة التدريس بالجامعات يساوى L.E.42,837 سنويا. يدعي عميد إحدى الكليات في جامعة خاصـة أن المتوسط عنده أكبر من ذلك. وللتأكد من ذلك اختيرت عينة عـشوائية من 44 عضو هيئة التدريس ووجد أن متوسط العينة هـو L.E. 44,445 بانحراف معيارى L.E.3000. بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ هل العميد على حق فيما ادعاه؟

(هـ) قال تقرير في الولايات المتحدة الأمريكية أن متوسط أعمـار الطـائرات المدنية هو 14 عاما. اختار مديرا تنفيذيا في شركة طيران كبيرة عينة مـن 36 طائرة ووجد أن متوسط الأعمار للعينة هو 11.8 عامـا بـانحراف معيارى 2.7 سنة. بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ هل يمكـن أن نـستنتج أن متوسط الأعمار لطائرات شركته أقل من المتوسط القومي؟

(و) متوسط إنتاج القمح في بلد ما هو 1.5 طن في الفدان. جربت حبـوب جديدة في 60 مزرعة فوجد أن متوسط إنتاج الفدان هـو 1.75 طـن بانحراف معيارى 225 كيلوجرام.

بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ هل يمكن أن نستنتج أن الإنتاجية زادت؟

(ز) أذاع تقرير أن متوسط دخول الآباء السنوى فى الجامعات الخاصة هو 91,600 جنيه. يدعى رئيس جامعة خاصة أن متوسط دخول الآباء السنوى فى جامعته أكبر من ذلك. اختيرت عينة عشوائية من 100 من الآباء فى جامعته فوجد أن متوسط الدخول هو 96,321 جنيه بانحراف معيارى 9555 جنيه. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نستنتج أن رئيس تلك الجامعة على حق؟

(ح) تقول التقارير الرسمية أن متوسط تكلفة الطالب الجامعى المغترب فى الولايات المتحدة من مصروفات دراسية وسكن ...إلخ هى 19,410$ سنويا. أخذت إحدى السفارات عينة من 40 مبعوثا لها فى جامعات مختلفة وحسبت التكلفة فأسفرت عن متوسط 22,098$ بانحراف معيارى 6050$. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أن نستنتج أن التكلفة قد زادت؟

(ى) تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط عدد المدعوين فى حفلات الزفاف هو 125 فى المتوسط. أخذت عينة من 35 زفافا هذا العام فوجد أن المتوسط هو 110 مدعوا بانحراف معيارى 30 مدعو. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أن نستنتج أن المتوسط يزيد عما تقرره الإحصائية؟

(ك) تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط دخل المدرس من الدروس الخصوصية هو 39,385 جنيها فى العام. أخذت عينة عشوائية من 50 مدرسا فوجد أن متوسط الدخل هو 41,680 جنيها بانحراف معيارى

5975 جنيه. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نستنتج أن المتوسط يزيد عما تقرره الإحصائية؟

(ل) قرر رئيس أحد الأقسام فى شركة تجارية أن متوسط قيمة فواتير المبيعات هو 20$ ولكن محاسب الشركة لا يشاركه هذا الرأى ويقول أن المتوسط أقل من ذلك. وللتدليل على ادعاء المحاسب اختار عينة عشوائية من 36 فاتورة مبيعات فوجد أن متوسطها $\overline{X}$ هو 19.2$ وتباينها s^2 هو 8. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نصدق ادعاء المحاسب؟

تمـــــرين ٤ب

١. من أى الوجوه يشابه توزيع t التوزيع الطبيعى؟ ومن أى الوجوه يخالفه؟

٢. ما هى درجات الحرية بالنسبة لتوزيع t ؟

٣. أوجد القيمة (القيم) الحرجة فى اختبار t لكل من الحالات الآتية:

(أ) $n = 6$، $\alpha = 0.01$ ، ذو ذيل أيسر (ب) $n = 9$ ، $\alpha = 0.025$ ، ذو ذيل أيمن

(ج) $n = 15$ ، $\alpha = 0.05$ ، ذو ذيلين (د) $n = 10$ ، $\alpha = 0.05$ ، ذو ذيل أيمن

(هـ) $n = 18$ ، $\alpha = 0.10$ ، ذو ذيلين (و) $n = 23$، $\alpha = 0.005$ ، ذو ذيل أيسر

(ز) $n = 28$ ، $\alpha = 0.01$ ، ذو ذيلين (ح) $n = 17$ ، $\alpha = 0.02$ ، ذو ذيلين

٤. قيس معدل سقوط المطر خلال أشهر الصيف فى شمال القارة الأمريكية فوجد أنه 11.52 بوصة. اختار باحث 10 مدن فى تلك المنطقة فوجد المعـــدل عـــام 2005 يساوى 7.42بوصة بانحراف معيارى 1.3 بوصة. هل يمكـــن بمـــستوى معنويـــة $\alpha = 0.05$ أن نستنتج أن المعدل فى المنطقة أقل من المعدل المعتاد؟

٥. تقول إحدى الإحصائيات أن متوسط مرتبـــات العـــاملين المـــؤهلين فى المجـــال

الاكتوارى هو $40,000 سنويا. اختار أحد الإحصائين عينة من 20 من الاكتواريين فوجد أن المتوسط هو $43,228 بانحراف معيارى $4,000. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نستنتج أن الإحصائية خطأ؟

٦. يقدر إحصائى أمريكى أن متوسط ارتفاعات العمارات التى تحتوى على 30 طابقا فأكثر هو 700 قدم. أخذت عينة عشوائية من 10 عمارات من هذا النوع فجاءت ارتفاعاتها كالآتى:

485	511	841	725	615
520	535	635	616	582

هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.025$ أن نستنتج أن التقدير خطأ؟

٧. فى عام من الأعوام وجد أن متوسط تكلفة الفيلم الواحد فى الولايات المتحدة الأمريكية هى 54.8 مليون دولار. فى العام التالى أخذت عينة من 15 فيلما من أفلام المغامرات فوجد أن متوسط تكلفتها 62.3 مليون دولار بتباين 90.25 (مليون دولار)^2. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أن نستنتج أن إنتاج أفلام المغامرات يتكلف أكثر من المعتاد؟

٨. متوسط السعرات الحرارية فى قطعة الشيكولاتة وزن 50 جرام يساوى 110 سعرا. أخذت عينة عشوائية من 15 قطعة من ماركات مختلفة ووجد بها السعرات الآتية:

100	125	150	160	185	125	155	110
145	160	100	150	140	135	120	

هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أن نستنتج أن السعرات الحرارية قد زادت عن المألوف؟

تمـــــرين ٤ج

١. أعط ثلاثة أمثلة لاختبارات الفروض للنسب.

٢. لماذا تعتبر النسبة متغير ذى الحدين؟ عند اختبار الفروض للنسبة ما هى المتطلبـــات الضرورية؟

٣. ما هو المتوسط والانحراف المعيارى للنسبة؟

٤. فى دراسة حديثة للإسكان فى المدن الجديدة وجد أن 64.7% من السكان يمتلكون مساكنهم. اتخذت عينة عشوائية من 150 مسكن وجد أن 92 من قاطنيها يمتلكون مساكنهم. هل يمكن بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن نتيجة الدراسة؟

٥. فى دراسة وجد أن 48.8% من الأسر لها استثمارات فى صورة أسهم. أخذت عينة من 250 عائلة وجد أن 142 منهم يتعاملون فى الأسهم. عند أى مستوى للمعنوية يمكن أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن الدراسة؟

٦. ذكر تقرير أن 40% من البالغين يمارسون هواية ألعـــاب الكمبيـــوتر فى أوقـــات فراغهم. اختيرت عينة عشوائية من 180 بالغ فوجد أن 65 منهم يمارسون تلـــك الهواية. بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ هل هناك دليل كاف على أن نستنتج أن النسبة اختلفت عن النسبة التى فى التقرير؟

٧. فى تقرير رسمى ذكر أن نسبة الطبيبات هى 27.9%. فى دراسة عن الأطباء المعينين فى جامعة كبيرة وجد من بين 120 من الأطباء المختارين عشوائيا توجد 45 طبيبة. بمستوى معنوية $\alpha = 0.01$ هل هناك دليل كاف على أن نستنتج أن نسبة الطبيبات المعينات فى الجامعة تفوق النسبة المذكورة فى التقرير؟

تمـــــرين ٤د

١. باستخدام جدول χ^2 أوجد القيمة (القيم) الحرجة لكل من الحالات الآتية مبينـــا منطقة القبول ومنطقة الرفض. أكتب فرض العدم والفرض البـــديل.[افـــرض أن $\sigma^2 = 225$]:

(أ) $\alpha = 0.05$ ، $n = 18$ ، ذو ذيل أيمن. (ب) $\alpha = 0.10$ ، $n = 23$ ، ذو ذيل أيسر.

(ج) $\alpha = 0.05$ ، $n = 15$ ، ذو ذيلين. (د) $\alpha = 0.10$ ، $n = 8$ ، ذو ذيلين.

(هـ) $\alpha = 0.01$ ، $n = 17$ ، ذو ذيل أيمن. (و) $\alpha = 0.025$ ، $n = 20$ ،ذو ذيل أيسر.

(ز) $\alpha = 0.01$ ، $n = 13$ ، ذو ذيلين. (ح) $\alpha = 0.025$، $n = 29$ ،ذو ذيل أيسر.

٢. يدعى خبير تغذية أن الانحراف المعيارى لعدد السعرات الحرارية فى ملعقة من صـــوص الكيك يساوى 60. أخذت عينة من الماركات المختلفة من الصوص وقيست السعرات الحرارية لها فوجدت كالآتى:

100	240	100	210	100	210	100	210	53
60	210	220	100	100	100	210	200	200

بمستى معنوية $\alpha = 0.10$ هل يمكن أن نرفض الادعاء؟

٣. اختيرت عينة عشوائية من 5 من عبوات العنب المُعَدَّة للتصدير ووزنت فوجد أن تباين العينة يساوى 6.5 كيلوجرام. عند مستوى معنوية $\alpha = 0.01$ هل يمكن أن نستنتج أن تباين المجتمع أكبر من 6.2 كيلوجرام؟

٤. تدعى شركة أن تباين محتوى السكر فى علب الزبادى الذى تنتجه هـــو 25 (يقـــاس محتوى السكر بالملليجرام فى الأوقية). اختيرت عينة عشوائية من 20 علبة وقيس محتوى السكر بها فوجد أن تباينها يساوى 36. بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$ هل يوجـــد دليـــل كاف لرفض ادعاء الشركة؟

٥. أخذت عينة عشوائية من 20 نوع من أنواع المخبوزات المسكرة وقيست سعراتها الحرارية فأسفرت عن الآتى:

230	250	270	310	310	300	220	260	320	:290
300	260	210	270	250	250	200	310	260	270

عند مستوى معنوية 0.01 = α هل يمكن أن نستنتج أن الانحراف المعيارى لسعرات مجتمع المخبوزات المسكرة يزيد عن 20 سعرا؟

٦. أخذت سبعة أيام عشوائيا من شهر يوليو فى مدينة من المدن وقيست درجات الحرارة العظمى فيها فوجدت كالآتى:

30 31 34 38 29 32 35

عند مستوى معنوية 0. 10 = α هل يمكن أن نستنتج أن الانحراف المعيارى لدرجات الحرارة العظمى فى شهر يوليو أقل من 5 درجات؟

٧. يدعى خبير تربوى أن الانحراف المعيارى لدرجات مادة الفيزياء فى امتحانات الثانوية يساوى 5 درجات بينما يعارضه مستشار الفيزياء ويقول أن هذة القيمة أقل من الواقع. اختيرت 300 ورقة عشوائيا وحسب انحراف درجاتها المعيارى فوجد أنه 6 درجات. عند مستوى معنوية 0. 05 = α هل يمكن أن نستنتج أن تقرير المستشار صحيح؟

٨. هل بعض مطاعم السوق أكثر صحية من بعضها؟ أخذت عينة عشوائية من البطاطس المقلية التى تقدم فى المطاعم وقيست كمية الدهن فيها بالجرام فأسفرت عن القيم الآتية:

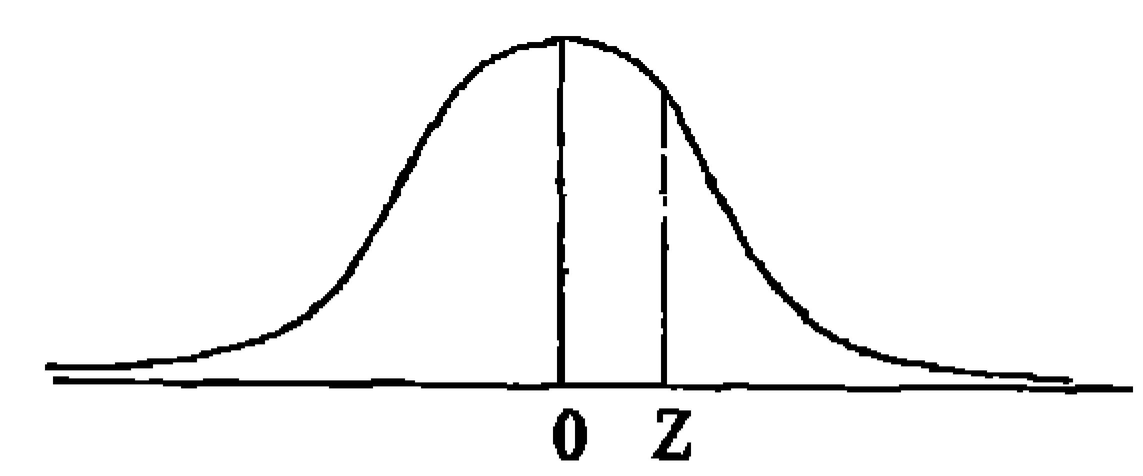
17	22	11	15	17	13	10	15
21	15	13	18	20	24	10	18

بمستوى معنوية 0.05 = α هل هناك دليل كاف على أن الانحراف المعيارى للبطاطس المقلية بالمطاعم يتعدى 4 جرامات؟

الجداول الإحصائية

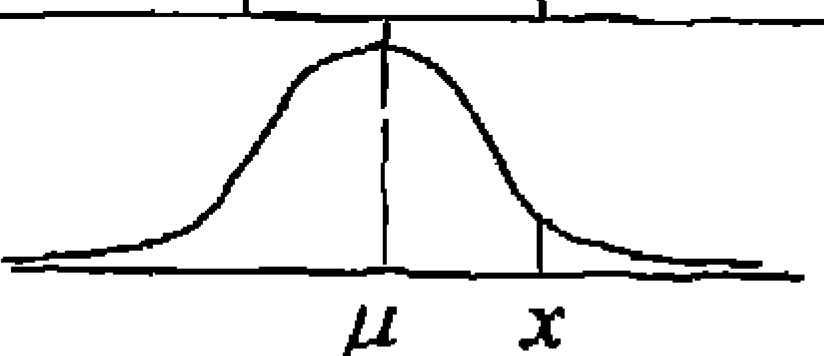
جدول التوزيع الطبيعي

0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1433	0.1480	0.1517
0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2703	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
0.3642	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990



جدول قيم الذيول للتوزيع الطبيعى

$\frac{X-\mu}{\sigma}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2398	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1410	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0778	0.0764	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0445	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.02275	0.02222	0.02169	0.01228	0.02068	0.02018	0.01970	0.01923	0.01876	0.01831
2.1	0.01786	0.01743	0.01700	0.01659	0.01618	0.01578	0.01539	0.01500	0.01463	0.01426
2.2	0.01390	0.01355	0.01321	0.01287	0.01255	0.01222	0.01191	0.01160	0.01130	0.01101
2.3	0.01072	0.01044	0.01017	0.00990	0.00964	0.00939	0.00914	0.00889	0.00866	0.00842
2.4	0.00820	0.00748	0.00776	0.00755	0.00734	0.00714	0.00695	0.00676	0.00657	0.00639
2.5	0.00621	0.00604	0.00587	0.00570	0.00554	0.00539	0.00523	0.00508	0.00494	0.00480
2.6	0.00466	0.00453	0.00440	0.00427	0.00415	0.00402	0.00391	0.00379	0.00368	0.00357
2.7	0.00347	0.00336	0.00326	0.00317	0.00307	0.00298	0.00289	0.00280	0.00272	0.00264
2.8	0.00256	0.00248	0.00240	0.00233	0.00226	0.00219	0.00212	0.00205	0.00199	0.00193
2.9	0.00187	0.00181	0.00175	0.00169	0.00164	0.00159	0.00154	0.00149	0.00144	0.00139



Tail Area	10%	5%	2.5 %	2%	1%	0.1 %	0.01%	0.001%
$(X-\mu)/\sigma$	1.2816	1.6449	1.9600	2.0537	2.3263	3.0902	3.7190	4.2649

جدول توزيع t

(ν تساوى عدد درجات الحرية)

ν	Two-tailed tests							ν
	50%	20%	10%	5%	2%	1%	0.1%	
1	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.557	1
2	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599	2
3	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924	3
4	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610	4
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869	5
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959	6
7	0.711	1.415	1.895	2.365	3.998	3.499	5.408	7
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041	8
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781	9
10	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587	10
11	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437	11
12	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318	12
13	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221	13
14	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140	14
15	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073	15
16	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015	16
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965	17
18	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922	18
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883	19
20	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850	20
21	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819	21
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792	21
23	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768	23
24	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745	24
25	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725	25
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707	26
27	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690	27
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674	28
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659	29
30	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646	30
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551	40
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460	60
120	0.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373	120
∞	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291	∞
ν	25%	10%	5%	2.5%	1%	0.5%	0.05%	ν
	One-tailed tests							

جدول توزيع χ^2 ((ν تساوى درجات الحرية)

99.5	99	97.5	95	90	10	5	2.5	1	0.5	0.1	ν
0.0000	0.0002	0.0010	0.0039	0.016	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88	10.8	1
0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6	13.8	2
0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8	16.3	3
207	0.297	0.484	0.711	1.06	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9	18.5	4
0.412	0.554	0.831	1.15	1.61	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7	20.5	5
0.676	0.872	1.24	1.64	2.20	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5	22.5	6
0.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.0	14.1	16.0	18.5	20.3	24.3	7
1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0	26.1	8
1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6	27.9	9
2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2	29.6	10
2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8	31.3	11
3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3	32.9	12
3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8	34.5	13
4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3	36.1	14
4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8	37.7	15
5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3	39.3	16
5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7	40.8	17
6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2	42.3	18
6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6	43.8	19
7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	28.4	31.4	34.2	37.6	40.0	45.3	20
8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4	46.8	21
8.64	9.54	11.0	12.3	14.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8	48.3	22
9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2	49.7	23
9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6	51.2	24
10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9	52.6	25
11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3	54.1	26
11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6	55.5	27
12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0	56.9	28
13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3	58.3	29
13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7	59.7	30

